教育研究集刊
第四十九輯第一期　2003 年 3 月　頁 95-133

討論與真實情境對兒童解決問題的影響

黃幸美

摘　要

本研究以 80 位四年級兒童爲對象，探討討論與提供實物的真實情境，對兒童解決生活數學問題與類比遷移解題的影響，以及分析兒童討論解題的策略與錯誤類型。研究結果發現，同時提供討論與實物的真實情境，兒童解決問題的表現最好。兒童在單獨提供實物或討論，或兩者並具的情境，於解題後經過三週的時間，類比遷移解題表現優於無實物無討論情境組的兒童。在解題策略分析上，兒童多數使用乘、除以及混合加、減運算，或等量連加策略，而且使用一一點數或跳數策略仍可見。在好與差解題者的類比遷移解題與錯誤類型分析上，好解題者雖然解題表現優於差解題者，而且解題錯誤次數低於差解題者，但是仍有購買過多或不足的錯誤。未能買得剛剛好與提取不相關的訊息解題，是兒童解題錯誤比例較高的類型。針對研究結果與發現，本文並提出相關的教學與研究建議。

關鍵字：討論、真實情境、類比遷移

本文作者為臺北市立師範學院初等教育學系副教授
電子郵件為：edith131@ms47.hinet.net
投稿日期：2002 年 9 月 10 日；採用日期：2003 年 2 月 14 日

Bulletin of Educational Research
March, 2003, Vol. 49 No. 1 pp. 95-133

A Study of the Influence of Verbal Interaction and Real-World Settings in Children's Problem-Solving

Hsin-Mei E. Huang

Abstract

Eighty fourth-grade children worked in mixed-ability dyads and were randomly assigned to four experimental conditions: with and without real-world settings and verbal interaction with peers. Dyads of children were asked to solve two daily mathematical problems in the first phase. Three weeks later, the children solved three daily mathematical problems as delayed transfer tasks. Dialogues between pairs of children during problem-solving were analyzed. Results show that verbal interaction accompanied by real-world settings is the most effective way to improve children's performance in solving problems. Either verbal interaction or real-world setting helps children's analogical transfer compared with solving problems individually without any

---

Associate professor, Department of Elementary Education, Taipei Municipal Teachers College
E-mail：edith131@ms47.hinet.net
Manuscript received: Sep. 10, 2002; Accepted: Feb. 14, 2003

real-world settings. Moreover, children tend to mix addition, multiplication and counting to solve problems through verbal interaction with peers in the performance of tasks. Accuracy at picking the best buys as well as selecting essential information from problem contexts were the major difficulties in children's problem-solving. In the conclusion of this study, the author offered some suggestions in teaching and research of related topics.

Keywords: verbal interaction, real-world settings, analogical transfer

壹、緒　論

兒童知識建構的來源，除了學校課程學習之外，生活問題解決經驗亦為重要來源。近年來認知與教學研究者，指出有意義的學習乃發生於社會情境與文化脈絡中，知識內容只有從其所產生的環境脈絡去解釋，訊息處理方能產生意義（Cobb, 1996; Watson, 1998）。此種重視情境脈絡並融合兒童生活經驗的學習觀，受下列三方面的實徵研究與理論支持，第一，從人類的智能觀點而言，解決日常生活相關問題的能力，是一種實務性的智慧（practical intelligence），它雖有別於學術性的智慧，但也是智慧能力重要的成分。生活問題具有多元解題途徑的性質，沒有固定的答案，其與生活相關，解題者需應用個人知識與經驗，使用策略有效地解決問題，因此，解決日常生活問題即為實務性智慧的表現（Wagner, 2000; 2002）。第二，從認知學習的觀點而言，人類在學習情境，具有主動地將新、舊經驗作聯結的心智運作能力（Medin, Ross & Markman, 2001; Sternberg, 1999）。提供兒童熟悉的日常生活情境，在文化環境脈絡賦予情境意義之下，可以有效地引發兒童經驗連結，建構知識（Irwin, 2001; Rogoff, 1990; Lave, 1988）；第三，從知識的遷移與推理思考觀點，統整所學的知識、技能，類比遷移解決問題，以及基於解決問題的經驗，將知識再建構，使個人的知識基模更精緻化，皆裨益後續的推理解決問題（Nickerson, 1994; Mayer, 2000; Vosniadou & Ortony, 1989），培養類比遷移解決問題的能力，是教育的重要目標。

根據 Vygotsky 及語言互動學習觀的學者，指出使用語言進行溝通、說明理由、質疑與澄清概念，引證回答挑戰的質疑，繼而引導出結果與解題行動的潛在途徑，上述的討論活動，乃具有目標導向的思考性質，隱含知識與技能的處理與應用，也是另一種形式的問題解決與心智活動（Glasson & Lalik, 1993; O'Connor, 1998; Vygotsky, 1978; Webb, 1989, 1991）。就數學領域的問題解決而言，其本身也包含複雜的社會實務（Ernest, 1998），非只是認知的例行性活動；而在認知處理歷程上，包含問題訊息的趨近、轉譯、應用事實知識與推理，構思解題策略與評斷，其與語言互動的討論學習歷程是相符應的（黃幸美，2001）。因此，本研究也以討論解

決數學問題爲核心。

在學校數學學習方面，以往的教學偏重個人獨自解題，兒童少有與同儕合作解決問題的經驗（劉好、許天維，1995）。隨著課程與教學改革的推動，小學數學課程標準與九年一貫課程數學領域教育目標，皆重視使用數學語言溝通、討論，與解決問題能力的培養（教育部，1993，2000）。自從民國八十五年全面推展數學新課程以來，其教學理念爲重視兒童的理解學習，鼓勵語言互動式溝通合理性思考，數學課室裡常可見教師導引兒童討論解題的教學景象，兒童也學習數學談論與合作解題。然而，兒童合作討論的學習成效如何，値得實證研究作檢視。

於合作討論的能力分組方面，Irwin（2001），Swing 和 Peterson（1982），Webb（1982a）的研究指出，異質分組可以產生較多的討論互動，好與差解題者的配對討論解題，可以有效提升差解題者的學習表現。因此，本研究擬進一步探討好與差解題者合作討論解決問題的表現。另一方面，在重視數學討論與溝通解題學習下，兒童解題策略類型雖然比較多樣化（黃幸美，1999；鍾靜，1995；Huang, 2001; Leung & Wu, 2000），但是就兒童平時的課室學習，問題類型多來自於教科書性質的文字問題，其問題較單純，或是紙筆性質的作業練習，非屬於真實生活情境問題。兒童於生活中常面臨應用數學知識解決問題的情境，在真實情境中不同能力的兒童，如何共同討論使用策略解決問題，有待研究作進一步分析。

實物操作、語言的使用，以及與他人社會互動，是兒童認識現實世界與邏輯數學關係，建構知識的重要途徑（Kamii & Ewing, 1996; Lowrie & Clements, 2001）。數學邏輯知識包含關係的覺察，然而關係不直接存在於個殊事物的外表，其乃學習者透過觀察、操作等歷程，作抽象化的內省與推理，例如：分類、對應、比較、組合等操作，繼而將事物作連結的心理運作建構出來的（Kamii & Ewing, 1996; Lowrie & Clements, 2001）。因此，提供兒童實物操作，亦常被鼓勵於數學教學中使用（Gravemeijer, 1991; Heuvel-Panhuizen, 2001; Reys, Suydam & Lindquist, 1995）。在提供實物的真實情境，對兒童解決問題的影響如何；不同的討論與實物情境，是否影響兒童類比遷移解題的表現，尙乏實證研究探討。

類比遷移是學習與解決問題的重要能力，其認知歷程爲：學習者自來源問題建立知識基模，注意來源與標的問題所包含的結構特徵相似性，繼而將來源問題

與標的問題的結構特徵，作對應與遷移解題，並擴展對應所產生的解決方案（Vosniadou & Ortony, 1989）。有關類比遷移解決問題之相關研究，雖然有學者對於兒童解決數學文字問題多所探討（例如：黃幸美，林美珍，鄭晉昌，1997；黃幸美，鄭晉昌，2000；黃幸美，2000，2001）。唯上述研究材料設計，乃以國小數學教科書，以及仿數學習作的問題爲主，學習材料非屬於生活問題，亦非以真實情境佈置方式呈現。另一方面，在受試者學習以後到遷移解題時間的間距方面，多數研究探討立即類比遷移解題，或有以時間間距爲兩天（例如：Anderson & Finchman, 1994; Phye, 2001）；或爲一週（例如：Catrambone & Holyoak, 1989）作延宕遷移研究；但是少有研究針對小學兒童，作更長時間間距的延宕遷移解題探討。

根據教育心理學者對於學習的定義，指出：學習是個體因經驗而使個體行爲或行爲潛勢產生改變，且維持良久的歷程（張春興，1994）。同時，根據前文之情境學習與討論學習的觀點，學習者透過討論與真實情境學習，可以有效建構知識。學習者對來源材料若有良好的學習，也將有理想的學習保留與類比遷移解題表現。因此，本研究擬以兒童學習來源材料後，經較長的時間間距延宕，探討其類比遷移解決結構特徵相似的問題之表現。

解決問題的問答討論，猶如有聲的思考對話。蒐集與分析解題者的解題討論內容資料，是了解解題者如何使用策略解題的途徑。就我國當前的數學課程與教學而言，雖然有部分的小學推展活動性的評量，例如：設計情境作業的闖關活動，以檢驗兒童是否具備作業相關的數學概念，或推展統整性的遊戲活動，評核兒童是否已學會活動相關的知識概念（例如：林惠貞，1999；Huang, 2001）。此顯示當前數學教育已逐漸重視連結兒童的活動經驗，但是上述活動重點僅止於讓兒童經驗課室以外的數學活動，以及檢核他們是否已學會預定的課程單元知識；但是分析兒童在真實情境解決生活數學問題的討論表現、解題策略，猶欠缺探討。

在數學知識方面，乘法概念是生活應用及數學課程中重要的一環，在日常生活實務方面，諸多問題情境需要應用乘法概念進行解題思考，了解兒童應用乘法概念於解決問題的表現，以及不同能力解題者的解題錯誤類型，對於教師認知兒童的數學知識與概念層次，具有意義。

兒童將習得的解題策略，保留一段時間，並能應用於解決新問題的表現，是一種習得知識的結果，也是將知識類比遷移的表現。但是有部分兒童可能受迷失概念；或執行解題程序不理想影響，導致解題錯誤。欲了解干擾解題者成功解題的因素，除了探討其學習與解題過程以外，分析解題者的解題錯誤類型，也是診斷解題者迷失概念的有效途徑（Sternberg, 1999）。認知兒童的知識學習與概念建構情形，是教師教學知識的重要成分（Shulman, 1986, 1987），本研究針對兒童應用數學概念解決問題作分析，研究結果將有助國小教師認知兒童的解題思考與概念建構情形，提供於教學過程診斷兒童的概念學習之參考。

綜合前述之理論探討與研究動機，本研究目的在於分析提供實物的真實情境與討論，對兒童解決生活數學問題的影響，並分析兒童討論解題的策略，比較好與差解題者類比遷移解題表現與錯誤類型的差異。研究結果期以提供教師設計生活數學教學，以及診斷兒童數學概念學習之參考。本研究探討四個問題：

一、不同討論與實物情境的兒童，其解決問題的表現是否有差異？

二、不同討論與實物情境的好與差解題者，類比遷移解題的表現是否有差異？

三、分析兒童在討論解決問題時，所使用的策略。

四、分析好與差解題者的解題錯誤類型，並比較其差異。

貳、研究方法與過程

一、研究對象的考量

本研究欲了解兒童應用所學的數學知識，解決隱含乘法概念的生活數學問題的表現，而小學中年級學生在學校數學課已經學習乘法、除法問題，也多有與同儕合作解題與討論的經驗，較能表達想法，有助於收集解題者在解決問題時討論的資料。因此，選取四年級兒童爲受試對象。

二、研究工具的設計

在研究工具的設計上，包含兩個歷程：(一)問題的初步設計：研究者從平時參訪與觀察國小校園活動、教室佈置，蒐集教師有關生活數學教學相關問題之資料，以及參考 Ruwisch（1998）之研究，設計三個問題，分別爲：卡通圖卡問題、同樂會問題——購物問題，以及運動會問題——購物問題。繼而將三個問題設計成問卷形式，調查 36 位參加師範學院碩士學分班暑期進修課程的國小在職教師，調查教師對研究工具的問題情境是否符合兒童生活經驗的意見。分析結果，發現教師認爲卡通圖卡問題、同樂會問題、運動會問題的情境，符合兒童生活經驗的百分比，分別爲 69.4%；97.3%；86.1%。從教師的意見調查結果可發現，本研究問題的情境設計符合兒童的生活經驗。(二)研究工具的預測：根據前述三個問題之結構與情境，再設計五題類似問題，即同樂會問題、露營問題、燈謎佈置問題、鋪地板問題與運動會問題。然後以臺北市中正區一所公立小學，隨機抽取 87 位四年級兒童，進行預試，以了解其鑑別度與難度。其結果於後文陳述。

三、研究階段、施測工具與過程設計

在真實情境的佈置方面，乃提供問題情境相符的實物，佈置商店的情境，讓受試兒童模擬購物，可以觸摸、搬動、計數與操弄實物。但是類似於超市購物的情況，不得將包裝拆封。

在研究過程方面，包含討論解題與類比遷移解題階段，呈如圖 1 所示。在討論解題階段，四組討論與實物情境的兒童，解決來源問題——燈謎佈置問題與露營問題。經過三週之後，四組受試兒童於類比遷移解題階段，解決標的問題——同樂會問題、鋪地板問體與運動會問題。五個問題呈如附件所示。兩個階段的施測時間，皆以兒童完成解題爲原則，未限制解題時間。

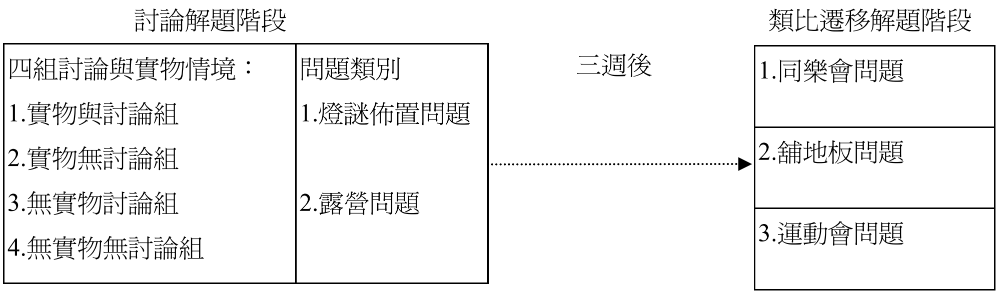


圖 1　研究階段與過程

四、討論解題階段

(一)受試兒童取樣：爲減少其他變異因素影響實驗效果，受試兒童自參加預試學校，選取非參與預試的其他四年級班級 80 位兒童參與施測。受試兒童的平均年齡爲 118.16 個月。

在研究相關的行政協調方面，研究者於取得受試學校之行政單位同意後，並與四年級教師座談，讓教師了解本研究目的，另一方面也從討論中了解教師平時的數學教學情形。本研究受試兒童使用的教科書爲國立編譯館發行的第七冊審定版本（國立編譯館，1999）。教師們也表示，兒童平時的學習多有同儕討論與合作解題的經驗。

(二)受試兒童分組之安排：在討論解題階段的分組，以好與差解題者兩人一組配對方式解題。首先，由受試班級教師，根據兒童在三年級下學期的數學總成績分數的平均數作區分，分數高於平均數者爲好的解題者，分數低於平均數者爲差的解題者。在搭檔分組的同時，除參考數學成績以外，請級任老師也酌量兒童平時的人際互動情形，以兒童合作討論意願較強者，作分組的考量，藉此使不合作討論的可能性降到最低。當教師安排好組別之後，以隨機分派方式將兩人一組的兒童，安排到四個討論與實物情境施測。

(三)討論與實物情境及施測方式：

討論與實物情境的安排，包含下列四種情境：1.實物與討論組：提供問題情境的各類實物，兒童可以操作實物，並鼓勵作解題討論。2.實物無討論組：提供

問題情境的各類實物，兒童可以操作實物，但是個別解題不作討論。3.無實物討論組：不提供問題情境的實物，但是鼓勵兒童作解題討論。4.無實物無討論組：不提供問題情境的實物，兒童個別解題不作解題討論。

四組兒童於解題之前，施測者先說明施測的方式，口述問題情境與作答方式，然後提供一份文字與圖繪併陳的作業單，請兒童將解答寫在採購單上。兒童討論解題的過程，全程作錄影與錄音。

使用於兩個解題階段的研究工具，五個問題的結構特徵、難度，以及鑑別度，分別呈如表 1 所示。從表 1 可見，討論解題階段的露營問題與燈謎佈置問題，難度分別爲 .49 與 .39，鑑別度分別爲 .96 與 .78。遷移解題階段的同樂會問題、鋪地板問題與運動會問題，難度分別爲 .50；.44；.43，鑑別度分別爲 .92；.58 與 .75。

兩個解題階段的問題結構特徵比較方面，兩兩問題之間，其算術結構與情境脈絡，皆具有相似特徵與對應性。例如：燈謎佈置問題與鋪地板問題，兩個問題的數學結構徵是相似的，皆屬於等量的乘法模式。露營問題與同樂會問題，兩個問題的數學結構徵是相似的，皆屬於等組的乘法模式。類比遷移解題階段的運動會問題，其數學結構爲等組的乘法模式，此方面與露營問題、同樂會問題相似；但是在算術結構特徵方面，其與前述四個問題之間，略微有差異。

兩個解題階段問題的表面特徵之比較方面，五個問題皆有冗餘訊息，各問題的情境、物品與包裝數量，皆存有差異，因此，表面特徵部分相似，部分不相似。

表 1　討論解題與類比遷移解題階段問題的結構特徵、難度與鑑別度

	討論解題階段的問題		類比遷移解題階段的問題		
問題情境	露營問題	燈謎佈置問題	同樂會問題	鋪地板問題	運動會問題
問題中的物品數量	每類物品各有不同數量的包裝（每物每包的數量爲 a）	1. 三張不同尺寸的壁報紙【面積量爲 a】 2. 不同顏色信封的包裝數量（每包數量爲 b）	每類物品各有不同數量的包裝（每物每包的數量爲 a）	1. 三個不同尺寸的房間地板【三個房間的地板面積，各爲 a】 2. 不同顏色地板的包裝數量（每包數量爲 b）	各色鈴鐺有不同數量的包裝（每包數量爲 b）
乘法模式	等量／組	1.長方形 2.等量／組；可整除	等量／組	1.長方形 2.等量／組；可整除	等量／組
算術結構	$X \times \boldsymbol{b} \geq 30$ 每包的份數是 $\boldsymbol{b}$, 其份量包含 2,3,4,5, 6,7, 8.	$X \times \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}$ 需先確定 $b \in \{3,6,8\}$	$X \times \boldsymbol{b} \geq 18$ 每包的份數是 $\boldsymbol{b}$, 其份量包含 2,3,4,5, 6,7,8.	$X \times \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}$ 需先確定 $b \in \{3,6,8\}$	$X \times \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}$ 在問題情境中的數量爲 30,23, 16,9,40 $b \in \{2,5,7\}$
冗餘訊息	一項物品	信封尺寸	兩項物品	地板尺寸	一項物品
難度	.49	.39	.50	.44	.43
鑑別度	.96	.78	.92	.58	.75

五、類比遷移解題階段

四組兒童於完成討論解題，經過三週之後，進行類比遷移解題施測。施測問題以文字與圖繪併陳的紙筆作業方式呈現。受試兒童在自己原屬的班級教室各自解題。施測者作施測說明並口述每個問題，兒童於聆聽與閱讀完問題以後，將解題方法記錄在採購單上。

六、採購單的計分方式

兩個解題階段之評分，皆根據兒童在採購單上的答案計分，每答對一項 5 分。燈謎佈置問題滿分爲 15 分；露營問題滿分爲 35 分。同樂會問題滿分爲 35 分；鋪地板問題滿分爲 15 分；運動會問題滿分爲 25 分。評分爲採取多重計分方式。

七、兒童的解題策略分析

在兒童討論解題的策略分析方面，乃統合討論解題階段的實物與討論組 10 組兒童，與無實物討論組 10 組兒童，於討論解題階段的錄影帶與錄音帶，並將討論過程內容轉譯成文字稿。其他兩組則因個別解題，而非與同儕討論解題，因此，不列入分析。在資料分析方法上，採用內容分析方法（Lincoln & Guba, 1985）。

由於研究工具的每個問題皆包含採購數樣物品，因此，兒童可能混合使用多種不同策略，而非只使用單一策略。在策略使用的次數統計方面，乃以討論小組爲單位，計數各小組所編碼的不同策略類型，不重複計數相同的策略類型。

八、好與差解題者的錯誤類型分析

由於類比遷移解題階段爲兒童個別解題，反應個人所學得的知識遷移表現，因此，錯誤類型分析也以此階段的解題紀錄爲主。同時，此階段三個問題皆屬於乘法性質的問題，問題結構特徵也具有相似性，因此，錯誤類型乃統合兒童在此階段所解決的三個問題，作錯誤類型分析。

在兒童討論解題策略類型與遷移解題的錯誤類型分析，爲研究者與一名國小在職教師，共同作分析。在資料分析歷程中，有些許分類不一致的部分，兩位分類者再根據受試兒童之解題紀錄作進一步討論，以建立共識，增進資料分析的可靠性（Lincoln & Guba, 1985）。然後參考 Miles 與 Huberman（1994）對資料分析的建議，於完成兒童的解題策略與錯誤類型分類與計次以後，將資料呈列成表格與統計成百分比例。

九、資料分析

在資料量化分析方面，所使用之統計考驗爲變異數分析、卡方分析作適合度考驗。各統計考驗的顯著水準，皆採用 .05 顯著水準。在內容分析方面，使用 Kappa 一致性分析，以及質性分析方法。

參、研究結果

一、不同討論與實物情境組別兒童的數學學期成績平均數之比較

爲了解四組兒童在正式施測前的數學學期成績是否具差異，以受試兒童在八十七學年度第二學期的數學學業總成績，使用變異數分析 ANOVA 進行考驗。從表 2 與表 3 可見，四組兒童的數學學期成績的變異數分析結果爲 $F_{(3,76)} = .07$, $p > .05$，顯示本研究四組兒童的數學學期總成績未具顯著差異。

表 2　不同討論與實物情境組別兒童的數學學期成績之平均數與標準差

組別	M	SD
實物與討論組（n=20）	88.15	6.19
實物無討論組（n=20）	87.05	10.92
無實物討論組（n=20）	87.65	8.37
無實物無討論組（n=20）	88.00	7.87

表 3　不同討論與實物情境組別兒童的數學學期成績之變異數分析摘要表（N=80）

	SS	Df	MS	F
組間	14.34	3	4.78	.07
組內	5502.05	76	72.40	
總數	5516.39	79		

二、不同討論與實物情境組別兒童討論解題表現之差異比較

爲了解不同討論與實物情境對兒童解題表現的影響，使用單因子變異數分析。從表 4 可發現，四組兒童在討論解題表現的平均數，由高而低排列，依序爲：實物與討論組，無實物討論組，實物無討論組，無實物無討論組。從表 5 可發現，組別的主要效果達顯著 $F_{(3,76)}=7.02, p< .05$，使用 Tukey 事後比較分析，結果發現，實物與討論組的表現顯著高於實物無討論組、無實物無討論組。

表 4　不同討論與實物情境組別兒童討論解題表現的平均數、標準差

組別	討論解題	
	M	SD
實物與討論組（n=20）	45.70	4.28
實物無討論組（n=20）	31.70	14.20
無實物討論組（n=20）	36.10	12.68
無實物無討論組（n=20）	29.25	14.79

表 5　不同討論與實物情境組別兒童在討論解題得分之變異數分析摘要表（N＝80）

變異來源	SS	DF	MS	F
時間	3155.24	3	1051.75	7.02*
組內	11389.95	76	149.87	
總數	14545.19	79		

* p< .05

三、不同討論與實物情境、好與差解題者在類比遷移解題表現之比較

於比較不同討論與實物情境、好與差解題者在類比遷移解題表現之差異方

面，使用二因子變異數分析。從表六與表七可發現，討論情境與解題者的交互作用效果未達顯著水準，$F_{(3,72)}=2.56$，$p< .06$；組別與解題者的主要效果，皆達顯著水準，分別爲 $F_{(3, 72)}=7.77, p< .05$；$F_{(1,72)}=37.30, p< .05$。由於四種討論情境組別的主要效果達顯著水準，再進行 Tukey 事後比較分析，結果發現，實物與討論組、實物無討論組、無實物討論組，解題表現皆優於無實物無討論組。在解題者的事後比較方面，爲好的解題者優於差的解題者。

表 6　各組好與差解題者在類比遷移解題得分之平均數與標準差

組別	解題得分	
	M	SD
實物與討論組		
好解題者（n=10）	65.70	7.42
差解題者（n=10）	53.20	17.95
實物無討論組		
好解題者（n=10）	67.40	3.75
差解題者（n=10）	39.90	23.17
無實物討論組		
好解題者（n=10）	62.70	6.41
差解題者（n=10）	53.20	9.68
無實物無討論組		
好解題者（n=10）	54.60	13.43
差解題者（n=10）	24.40	21.44

表 7　各組好與差解題者在類比遷移解題得分之變異數分析摘要表（N=80）

變異來源	SS	DF	MS	F
組別	4965.50	3	1655.01	7.77*
解題者	7940.11	1	7940.11	37.30*
組別×解題者	1633.84	3	544.61	2.56
總數	15327.50	72	212.88	

＊p < .05

四、兒童討論解題策略分析結果

兩位分類者共同根據兒童討論解題的錄影帶與文字稿，對解題策略類型作分類與編碼。兩人的分類結果經 Kappa 的一致性分析，爲 $.57, p< .05$，顯示分類結果具有一致性。

兒童討論解題使用的策略包含十種，分別陳述如下，以及表 8 所示。

(一)直接使用乘法或除法一個步驟完成解題。兒童了解乘與除互逆的關係，應用九九乘法，完成乘與除的解題。所使用的策略包含三種：

1.在所需的總數量確定下，交互使用乘法與除法。例如：生 1：「長和寬兩邊都是 6，6×6＝36，36÷6＝6，6 包 6 個，好啦！」（燈謎佈置問題）

2.先確定應乘的倍數，再求出積。例如：生 1：「藍色，我記得是 6×6，6×6＝36。」（燈謎佈置問題）。

3.直接以被除數除以除數，求出商。例如：生 2：「30÷5 ＝ 6，6 包夾子。」（露營問題）

(二)混合使用加法與乘法策略。兒童在解題過程中，部分使用加法策略，部分使用乘法策略。例如：生 2：「4＋4＝8，5＋5＝10，10＋8＝18，1,2,3,4…6，6×3＝18，所以說 18 張。」（露營問題）

(三)混合使用乘法與減法策略。兒童使用乘法，將倍數逐一累乘，求出積（購買的量），再根據題目所需的總量減其購買的量，以檢驗是否買得剛剛好。例如：生 1：「火種，7×1＝7，7×2＝14…7×5＝35，剩 5 顆。」（35－30＝5 用心算）（露營問題）

(四)混合使用加法、減法與乘法策略。例如：生 1:「0.5×8＝4，　3×8＝24，24＋4＝28，28－6＝22…」（燈謎佈置問題）

(五)混合使用加法、減法、乘法與除法策略。例如：生 2：「紫色的這個，有 8 張裝和 3 張裝，5×4＝20（黃色壁報紙所需的信封數），就等於 11 了，20－11＝9，9÷3＝3，所以，就 4 包 3 張裝的。」（燈謎佈置問題）

(六)混合使用計數方法（以一或二爲計數單位）、加法與乘法策略。例如：生 2：「24，那要怎麼買？」，生 1：「喔！24，8×1＝8，8×2＝16，17, 18, 19, 20, 21,

22, 23, 24。」（露營問題）

(七)重複累加策略。兒童以單位份數連續累加，直到和達到所需的份數。例如：生 2：「我加加看，4+4 = 8；8+8 = 16；16+4 = 20；20+4 = 24，不夠啦！」（露營問題）

(八)使用以一或二或三爲計數單位之計數策略。兒童以一，或二，或三，爲計數單位，點算總數。

1.以一爲計數單位，點數出所需的總數。例如：

生 2：「1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16。」（露營問題）

2.以二爲計數單位，點數出所需的總數。例如：

生 1：「2,4,6,8,10,12,14,16,18,20。」（露營問題）

3.以三爲計數單位，點數出所需的總數。例如：

生 1 和生 2：「3,6,9,12,15,18,21,24,27,30。」（露營問題）

(九)畫格子並數算。在燈謎佈置問題解決上，兒童使用尺在作業單上畫出格子，數算格子以求面積。例如：

生 2：「藍色這個沒有畫格子，我來畫格子。」

生 1：「1,2,3,4,5,6,7,……31,32,33,34,35,36。」（燈謎佈置問題）

(十)使用心理運算。兒童直接說出答案，未表現任何策略。例如：

生 2：「黃色壁報紙，這邊是 4 張，這邊 5 張，總共 20 張。」（燈謎佈置問題）

從表 8 可見，兒童討論解題所使用各種策略之次數百分比，由高而低排列，依序爲：「直接使用乘法或除法一個步驟完成解題」、「混合使用計數方法（以一或二爲計數單位）、加法與乘法策略」、「重複累加策略」、「混合使用乘法與減法策略」、「混合使用加法與乘法策略」、「混合使用加法、減法與乘法策略」、「混合使用加法、減法、乘法與除法策略」、「使用以一或二或三爲計數單位之計數策略」、「畫格子並數算」、「使用心理運算」。

表 8 兒童討論解題策略次數與百分比

解題策略	次數	百分比
(一)直接使用乘法或除法一個步驟完成解題。	27	34.6%
(二)混合使用加法與乘法策略。	3	3.8%
(三)混合使用乘法與減法策略。	9	11.5%
(四)混合使用加法、減法與乘法策略。	2	2.6 %
(五)混合使用加法、減法、乘法與除法策略。	2	2.6%
(六)混合使用計數方法（以一或二為計數單位）、加法與乘法策略。	20	25.6%
(七)重複累加策略。	11	14.1%
(八)使用以一或二或三為計數單位之計數策略。	2	2.6%
(九)畫格子並數算。	1	1.3%
(十)使用心理運算。	1	1.3%
總次數	78	100%

五、好與差解題者的錯誤類型分析

兩位分類者統合全體受試兒童，在類比遷移解題階段解決三個問題的作業單，作解題錯誤類型分析。在分析過程上，先去除各問題解題完全正確者，其中運動會問題為 21 人；同樂會問題為 44 人；舖地板問題為 1 人，然後針對各題解題錯誤作類型分類。兩位分類者的分類結果，經 Kappa 的一致性分析，結果為 .87, $p< .05$，顯示分類結果具有一致性。

好與差解題者在類比遷移解題上的錯誤類型，包含六種，各錯誤類型次數、百分比與適合度考驗，呈如表 9 所示，並分別陳述如下：

第一類：購買的量過多。兒童有解題行為，也完成部分解題，但是未能根據問題所需求的包數（數量），達成「買得剛剛好」與「使佈置以後，剩下的量最少」的條件。好與差解題者在此類型的次數比例比較，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1,N=462)}=7.72$，$p< .05$，差解題者的次數百分比例，高於好解題者。

第二類：購買的量不足。兒童有解題行為，也完成部分解題，但是未足以達

成問題條件所需的量作解題，即購買的總包數未能合乎「買得剛剛好」的條件，或在運動會問題上，亦未滿足「各色氣球預定購買的個數」的條件。好與差解題者在此類型的次數比例比較，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1,N=462)} = 6.00$，$p< .05$，差解題者的次數百分比例，高於好解題者。

第三類：提取不相關的訊息解題。兒童雖使用加、減或乘法運算，並列出算式記錄，但是未能針對問題條件思考，提取與解題無關的訊息作運算。例如：購買的包數與商店陳售之包數不符；照圖示繪圖或列寫算式。好與差解題者在此類型的次數比例比較，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1,N=462)} =19.56$，$p< .05$，差解題者的次數百分比例，高於好解題者。

第四類：填答失誤或不完整。兒童表現充分解題，但是在算式紀錄或答案填寫失誤。例如：採購之算式紀錄、計算結果正確，但答案之單位寫錯；或填寫算式紀錄時，數字筆誤。好與差解題者在此類型的次數比例比較，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1,N=462)} = .51$，$p> .05$，兩種解題者的次數百分比例，沒有差異。

第五類：計算失誤。兒童表現充分解題，但是乘法運算錯誤。好與差解題者在此類型的次數比例比較，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1,N=462)} =1.80$，$p> .05$，兩種解題者的次數百分比例，沒有差異。

第六類：空白未答。兒童未作任何解題紀錄，在採購單上空白未答。好與差解題者在此類型的次數比例比較，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1,N=462)} = 4.96$，$p< .05$，差解題者的次數百分比例，高於好解題者。

從表 9 可見，六種錯誤類型的次數百分比由高而低，依序排列爲：購買的量不足；購買的量過多；提取不相關的訊息解題；空白未答；填答失誤或不完整；計算失誤。好解題者的錯誤總次數低於差解題者，經卡方適合度分析，$\chi^2_{(1, N=462)} = 37.71$，$p< .05$。購買的量不足或過多，以及提取無關的訊息解題，是兩種解題者解題錯誤次數較多的類型。

表 9　好與差解題者解題錯誤類型、次數、百分比與適合度考驗

錯誤類型	好解題者		差解題者		總次數		適合度考驗χ^2值
	次數	百分比	次數	百分比	次數	百分比	
(一)購買的量過多	62	37.6%	75	25.3%	137	29.7%	$\chi^2_{(1,N=462)} = 7.72^*$
(二)購買的量不足	74	44.9%	99	33.3%	173	37.4%	$\chi^2_{(1,N=462)} = 6.00^*$
(三)提取不相關的訊息解題	19	11.5%	88	29.6%	107	23.2%	$\chi^2_{(1,N=462)} = 19.56^*$
(四)填答失誤或不完整	5	3.1%	13	4.4%	18	3.9%	$\chi^2_{(1,N=462)} = .51$
(五)計算失誤	1	0.6%	0	0%	1	0.2%	$\chi^2_{(1,N=462)} = 1.80$
(六)空白未答	4	2.4%	22	7.4%	26	5.6%	$\chi^2_{(1,N=462)} = 4.96^*$
總次數	165	100%	297	100%	462	100%	$\chi^2_{(1,N=462)} =37.71^*$

$^*p < .05$

肆、研究結果之討論與建議

合作討論解題是當前備受推展的教學活動，真實情境與實物提供，被視爲正向助益兒童解題思考的媒介。因此，本研究以國小學童爲研究對象，設計與兒童生活經驗相關的生活數學問題情境，提供模擬購物的真實情境，讓兒童合作討論解題，探討討論與真實情境對兒童解決問題與類比遷移解題的影響，分析兒童討論解決問題的策略，與解題的錯誤類型。以下根據研究結果與發現，並綜合相關的理論，分別提出討論，以及對教學與後續研究的建議。

一、研究結果與討論

(一) 討論、提供實物的真實情境與兒童解決問題表現的關係

在不同討論與實物情境組別兒童，討論解題表現之差異比較方面，本研究發現兒童在不同討論與實物情境組別，其討論解題表現存有差異。提供討論與實物的真實情境兩者並存，對兒童解題的助益效果強於獨自解題（無討論無實物提供），也優於只提供實物無討論的情境。此研究結果部分支持合作討論對解決問題正向助益效果的研究發現（Greasser & Person, 1994；King, 1989, 1990; Webb, 1989, 1991），值得注意的是，本研究發現對小學中年級學童的問題解決，單獨提供討論或實物的情境，其助益解題效果未顯著優於無討論與無實物的情境。因此，對學齡階段兒童的解決問題而言，討論與實物提供兩者並重，對兒童合作解題的助益方有明顯的效果。

除此以外，單獨提供討論與實物的真實情境，對兒童學習與解決問題的影響，可從下列兩方面作討論：

1.提供實物的真實情境，其對認知發展階段處於具體運思期的兒童而言，是學習與理解數學抽象符號、表徵，以及建立數感，不可或缺的活動（劉秋木，1996；National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2000）。提供具體的實物，有助兒童了解問題的情境脈絡，其猶如提供問題的表面特徵，同時，藉助解題時的操作，將問題特徵具象化；但是成功地解題，尚須注意問題的訊息條件，認知問題的潛在結構特徵（Gentner & Rattermann, 1993），以及將視覺訊息轉化為解題表徵，並執行解題程序（Lowrie & Clements, 2001）。欲成功地將視覺訊息轉化為解題表徵，並執行解題程序，解題者需要理解問題潛在的概念，考量問題條件與結合計算技能。因此，單純提供實物的真實情境，其對兒童解決多項步驟的複雜問題，助益效果仍是有限的。

2.本研究材料的問題設計，雖然取自兒童的生活經驗，但是每一問題皆包含數項訊息。兒童欲完成解題，除了確定來源與標的問題之間的特徵相似性以外，尚須了解問題特徵的限制，正確掌握問題訊息與潛在關係（Keane, 1997），以及能轉化習得的概念、解題經驗與技能，表現於解題。例如：研究者於後續晤談兒

童，對於判斷問題情境與個人購物經驗是否相似的觀點，兒童表示：「這些東西和超市賣的很像，但是和腦袋裡要想的不一樣。」，可見雖然對問題情境熟悉，但是解題時仍需要提取相關的概念與運算技能，方能成功解題。應用數學概念與運算技能解決問題，屬於高層次的心智運作，熟悉的情境與具體實物，雖然提供足以讓兒童趨近的表面特徵，但是對後續的解題策略、能否正確的執行解題程序，未具顯著影響關係。因此，教學不能僅以提供兒童熟悉的情境爲滿足。

3.本研究在討論解題階段所提供的問題作業，皆呈現圖示表徵各物件的包裝數量單位與包數，在無實物提供的情境下，兒童雖然不能實際操作實物，但是進行解題討論時可參考圖示，圖示表徵對四年級兒童解題討論，可能具有部分程度的助益性，因此，提供實物的真實情境效果對問題解決的影響不明顯。

(二) 不同討論與實物情境、好與差解題者在類比遷移解題表現之比較

1.本研究發現不同討論與實物情境組別的兒童，於類比遷移解題的表現存有差異，實物與討論組、實物無討論組、無實物討論組的表現，皆優於無實物無討論組，而且，好解題者在類比遷移解題的表現，優於差解題者。

綜合上述的研究結果可見，雖然實物無討論組、無實物討論組，兩組兒童在討論解題階段的解題表現，與無實物無討論組沒有明顯差異；但是兩組兒童於經過討論或實物操作的解題經驗，猶具有學習效果，其與提供討論與實物組兒童，於經過一段時間之後的遷移解題表現，皆優於無實物無討論組的解題表現。就學習與類比遷移的意義而言，學習者能保留愈多習得的知識技能，以及活化知識以對應解決新問題，即爲認知學習的最高旨趣。本研究發現討論與提供實物的真實情境，對兒童學習來源問題，經過三週以後，類比遷移解題具有相當程度的助益，其可能由於兒童從討論或實物情境，在解決來源問題的當時，對問題的內容、結構與情境脈絡，或以語言討論解題方法或操作實物，對來源問題基模的訊息處理較深入，裨益學後遷移解決結構相似的標的問題。

2.在好與差解題者的解題表現比較方面，研究發現好解題者的解題表現優於差解題者，而且差解題者的解題錯誤次數多於好解題者。影響上述結果的原因，可從研究過程的觀察，提出三方面說明：

(1)好與差解題者合作討論的互動程度，可能影響學習與解題效果。雖然兒童

與同儕之間使用相同的語彙，可以轉換較困難的詞彙與表達，使用讓對方聽得懂的語言表達，以進行溝通，同儕討論因而被視爲智慧交換的歷程，有助知識的建構；但是同儕之間合作討論的互動程度，卻可能影響學習與解題效果（King, 1989; Webb, 1982b, 1991）。從研究中觀察兒童討論解題的過程，發現好解題者有時獨自解題，並未與差解題者充分溝通與討論，此現象亦見之於 Webb（1989）的研究，當雙方討論不足時，對差解題者學習效果的助益也有限。

(2)解題者的知識與監控能力，影響解題表現。好解題者雖能夠提出正確的解題策略，但是可能受限於語文表達能力與知識監控能力不足，常只提出數學算式，對解題程序與問題條件呼應的情形，則缺乏詳細的理由說明與解釋，而且不善於檢查自己與他人知識的缺失或策略的錯誤，此也將影響討論學習效果。

(3)在問題解決歷程中，好解題者表達較多的解題想法或實物操作，其有如準備教人的一方，傾向組織其認知結構，以利於向對方陳述與說明，此種認知結構的組織性，促進教人者對事實性表徵與事實本身關係的保留（Bargh & Schul, 1980）。好解題者傾向說明想法，裨益個人知識的建構，可能因而解題表現優於差解題者。相對地，差解題者傾向爲被解釋的對象，倚賴好解題者的解題策略（Swing & Peterson, 1982; Webb, 1982a），如果差解題者未能針對對方所提的想法作出回應，以及要求對方較詳細的理由解釋，充其量僅爲接受解答，其學後應用也因而有限，難以與好解題者有相同的表現。

（三）兒童討論解決問題的策略

從分析兒童討論解題使用的十種策略，可發現四年級兒童自二年級開始學習乘除概念，經過一年多的學習經驗，約 35%以上的兒童能直接應用學校所學的乘法基本事實（九九乘法）完成運算，例如：「直接使用乘法或除法一個步驟完成解題」、「使用心理運算」策略，表示兒童認識乘法概念中的高、低階單位的關係（劉秋木, 1996; Clark & Kamii, 1996; Mulligan & Wright, 2000）。另有約 60%的兒童使用混合的運算方式，以及視單位內的數量爲抽象的合成，進行等量連加的運算，例如：使用「混合使用乘法與減法策略」、「混合使用加法、減法與乘法策略」、「混合使用加法與乘法策略」、「混合使用加法、減法、乘法與除法策略」與「重複累加策略」解題。根據 Clark 和 Kamii（1996）對兒童認知乘除概念發展的研究，以

及 Mulligan 和 Wright（2000）所提的乘法概念五個發展層次的觀點，本研究發現四年級兒童的認知層次，多數處於第四與第五層次，即使用等量連加策略或直接以乘／除運算，可以將單位內的數量作爲抽象的合成（第四層次）；或了解單位數（低階）與單位量（高階）的關係，記憶乘法的事實知識（九九乘法），以及認知乘/除互逆的關係（第五層次）。然而，使用一一點數的策略或跳數策略，此種策略常見之於二、三年級的兒童（Franke & Ruwisch, 2000; Ruwisch, 1998），但本研究發現少數四年級兒童仍使用「畫格子並數算」、「使用以一或二或三爲計數單位之計數策略」解題。上述兩種計數策略，根據 Mulligan 和 Wright（2000）的乘法概念認知層次觀點，爲第二階段的發展層次——藉助感官知覺進行跳數方式的計數，與第三階段的發展層次——混合使用加法或跳數方式計數，此兩階段的兒童可能尚未充分理解乘除互逆的關係。同時，畫格子一一計數的策略，雖然是兒童解決面積問題時常用的方法（Outhred & Mitchelmore, 2000），但是其也是比較缺乏效率的方法。

(四) 兒童的解題錯誤類型分析，以及好與差解題者解題錯誤類型比較

本研究分析兒童的解題錯誤類型，可歸納爲六種，不同能力解題者的錯誤類型之次數百分比，存有差異。好與差解題者在購買的數量過多或不足類型上，皆佔有相當高的次數百分比。購物量能買得剛剛好，是解決生活問題的一種挑戰，也是實務智慧的表現（Wagner, 2000）。買得剛剛好的購物能力之培養，是教學可以融入的議題。

另一方面，雖然好解題者在錯誤類型總次數低於差解題者，但是提取不相關訊息解題，以及解題歷程的注意與解題後的監控能力，是可再提升的。從分析差解題者解題錯誤類型，其解題能力的缺失，包含：一、不易正確掌握問題條件，例如：處理鋪地板問題，求算面積是解題的第一步驟，尙須根據面積量採購所需的地板包數，以完成解題；但是部分差解題者將面積量視爲所需的塊數答題，未能正確掌握問題條件與充分執行問題條件的需求；二、難以正確根據問題訊息解題，其雖呈現解題記錄，但是無法達成解題目標，例如：「提取不相關的訊息解題」的錯誤類型，其徒有解題紀錄，但爲無意義解題；三、少數差解題者尙未能應用乘法知識或所學策略進行解題，因而解題動機低落，甚或放棄解題。上述現象，

是教師對差解題者進行學習輔導須予修正的問題。

二、教學與研究建議

(一) 教學建議

1.兒童在合作討論情境學習，重心在於討論成員之間，進行知識的「取與給」交流，藉此歷程達到知識建構，也是教師導引學生合作討論學習的旨趣（Cobb, 1996）。教師當了解所謂開放兒童討論的機會，並非只是讓兒童有說話的機會，更重要的是導向結構性的問答討論。本研究發現四年級兒童在經歷三年多的討論學習經驗，其與同伴討論解題的表現，猶可發現互動行爲與討論品質尙待加強之處。欲導引學生作高結構性互動、有效的解題討論，Koher , Ezell, Hoel 和 Strain（1994）與 Noddings（1985）提出以下建議：(1)教師先介紹重要的主題概念；(2)指導討論的原則與步驟，例如：澄清問題，輪流發言的原則，聆聽與尊重他人合理性想法的態度等；(3)主持開放性的合作討論。換句話說，確立議事程序，並讓學生練習與熟悉討論程序、規則，而且在討論進行時，教師須視學生討論的內容是否切題，並作適時的介入，以避免離題。

2.欲使不同能力者能從合作討論中進行知識學習，教師一方面加強兒童同儕之間的有結構問答討論，指導能力好的解題者分享、解釋說明訊息，一方面監控自己的思考，另一方面幫助能力較低的解題者學習；對於能力較低的解題者，指導其從同儕討論互動中，適當地提問與尋求概念的了解，皆值得教師在施行合作討論教學加以輔導的要務。

3.就兒童的解題策略與錯誤類型研究發現，提供以下教學建議：(1)教師可以多提供與兒童生活經驗關聯的情境與文字問題，因爲學習者的數學概念基模，有部分是建構自生活經驗相關的情境。(2)題目類型的設計由簡而繁，讓兒童學習掌握解題相關的訊息，能剔除不相關訊息之干擾，以及提供具體物的操作，加強兒童正確掌握高、低階單位所代表的數量與關係，以成功執行運算（NCTM, 2000）。因爲數學知識的學習包含：概念、程序與直觀三部分，兒童在學習問題解決程序時，未必學習到相對應的概念，如此他們也不能將所學得的程序性知識遷移解決新問題，例如：差解題者常表現取用與解題無關的數字，作解題與運算，他們雖

能記憶九九乘法表，但是若沒有澄清乘法概念的高、低階單位量之間的關係，也不能正確地應用乘法事實知識解決問題。同時，教師提供問題時，先以每個問題隱含一個解題目標，透過逐次的目標達成，幫助學生建構概念（McNeil & Alibali, 2000），因爲複雜的程序乃發展自簡單的程序（Mayer, 1987/1990），從單純的問題也比較容易診斷出解題者的迷失概念。(3)在導向概念應用與解題作業方面，新近的研究指出，數學的概念理解與程序性知識之間，具有相輔相成之效（例如：Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001），兩者適度的練習具有相互強化的效果。概念建構是個持續的歷程，學生透過社會性的討論互動解決問題之後，也需要與自己內在的認知系統作互動，統整個人與內、外在的互動歷程，將新訊息表徵納入概念網絡。尤其數學解題能力的培養是長期的過程，教師提供一些作業活動，讓學生回顧與組織所學的知識，從數字運算與概念應用，察覺數學的規律（Phye, 2001），是數學學習不可忽略的一環。

(二) 對後續研究的建議

1.本研究在討論解題階段，兒童的解題討論爲開放式討論，沒有提供任何指導性的問答參考，雖然兒童平時多有小組討論解題的經驗，但是仍發現部分兒童進行問答討論的程度不足之現象。未來的研究可於討論階段，提供指導性的提問參考，或解題目標導向的問題提示（例如：Brown & Palinsar, 1989; King, 1994），進一步探討其對提升差解題者解題表現的影響。

2.在真實情境提供方面，本研究爲符合日常的商店陳售情形，讓解題者可以操作實物，但是不能拆封計數，此也可能影響實物助益解題的效果。未來研究可設計讓兒童可以拆開包裝計數，以探討實物的助益效果。

3.在問題材料的提供方面，提供書面作業可能降低兒童對實物利用的程度，因而影響解題表現。未來的研究，可試僅以口述說明問題取代書面作業，以比較實物的真實情境與討論，對兒童解題助益效果的差異。

致謝：本研究為國科會研究專案 89-2413-H-133-003 之部分內容，文中論點不代表國科會。本研究結果曾於 2001 年第二十五屆心理與數學教育國際學術研討會（The 25th Conference of the International Group for the Psychology of

Mathematics Education）發表。本研究感謝研究助理王逸崴、陳淑茗在研究過程上的協助。

參考文獻

林惠貞（1999）。**海闊天空開放教育。課程篇②：TT 教師群協同教學與課程統整**。臺北：聯經。

國立編譯館（1999）。**國民小學數學教學指引，第七冊（四上）**。臺北：國立編譯館。

教育部（1993）。**國民小學課程標準**。臺北：台捷。

教育部（2000）。**國民中小學九年一貫課程（第一學習階段）暫行綱要**。臺北：教育部。

黃幸美、林美珍、鄭晉昌（1997）。國小學童好與差解題者的類比推理解題表現之探討。**教育與心理研究，20（上冊）**，頁 111-139。

黃幸美（1999）。**營造有意義學習環境之探討**。臺北市立師範學院國小師資職前教育專業化學術研討會論文。

黃幸美（2000）。兒童問答討論解決類比推理問題之探討。**臺北市立師範學院學報，31**，頁 49-72。

黃幸美、鄭晉昌（2000）。解決數學問題的類比推理思考——問題相似性與領域知識的影響。**臺北市立師範學院學報，31**，頁 135-160。

黃幸美（2001）。兒童解決數學及自然科學問題的問答討論與類比推理思考之研究。**教育心理學報，32（2）**，頁 123-144。

張春興（1994）。**教育心理學：三化取向的理論與實踐**。臺北：東華。

劉好、許天維（1995）。數學科教材教法基本理念。載於**八十三學年度國民小學新課程數學科研討會論文暨會議實錄專輯**（頁 11-46）。臺北縣：臺灣省國民學校教師研習會。

劉秋木（1996）。**國小數學科教學研究**。臺北：五南。

鍾　靜（1995）。數學教師面對新課程的成長。載於**八十三學年度國民小學新課程數學科研討會論文暨會議實錄專輯**（頁 91-100）。臺北縣：臺灣省國民學校教師研習會。

Anderson, J. R. & Finchman, J. M.(1994). Acquisition of procedural skills from examples. *Journal of Experimental Psychology, learning, memory, and Cognition, 20*(1), 1322-1340.

Bargh, J. A. & Schul, Y. (1980). On the cognitive benefits of teaching. *Journal of Educational Psychology*, *72*(5), 593-604.

Brown, A. L. & Palincsar, A. S. (1989). Guided cooperative learning and individual knowledge acquisition. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays, in honor of Robert Glaser* (pp.393-451). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Catroambone, R. & Holyoak, K. J. (1989). Overcoming contextual limitation on problem-solving transfer. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *15*(6), 1147-1156.

Clark, F. B. & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41-51.

Cobb, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. In C. T., Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp.34-52). Teachers College, Columbia University. NY.

Ernest, P. (1998). Mathematical knowledge and context. In A. Watson (Ed.), *Situated cognition and the learning of mathematics* (pp.13-31). Center for Mathematics Education Research, University of Oxford Department of Educational Studies. U.K.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2000). A dollhouse as a situational context for multiplicative reasoning. *New England Mathematics Journal*, 18-28.

Gentner, D. & Rattermann, M. J. (1993). The roles of similarity in transfer: Separating retrievability from inferential soundness. *Cognitive Psychology*, *25*, 524-575.

Glasson, G. E. & Lalik, R. V. (1993). Reinterpreting the learning cycle from a social constructivist perspective: A qualitative study of teachers' beliefs and practices. *Journal of Research in Science Teaching, 30*(2), 187-207.

Gravemeijer, K. E. P. (1991). An instructional-theoretical reflection on the use of manipulatives. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute* (pp.57-76). Freudenthal Institute, Utrecht. The Netherlands.

Greasser, A. C. & Person, N. K. (1994). Question asking during tutoring. *American Educational Research Journal, 31*(1), 104-137.

Heuvel-Panhuizen, M. van den. (2001). *Children learning mathematics*. Freudenthal Institute, Utrecht. The Netherlands.

Huang, H. M. E. (2001). Teaching mathematical problem solving in Taiwan elementary schools. In E. Pehkonen (Ed.), *Problem solving around the world* (pp.75-81). Finland, University of Turku.

Irwin, K. C. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(4), 399-420.

Kamii, C. & Ewing, J. K. (1996). Basing teaching on Piaget's constructivism. *Childhood Education*, *72*(5), 260-264.

Keane, M. (1997). What makes an analogy difficult? The effects of order and causal structure on analogical mapping. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *23*(4), 946-967.

King, A. (1989). Verbal interaction and problem-solving within computer-assisted cooperative learning groups. *Journal of Educational Computing Research*, *5*(1), 1-15.

King, A. (1990). Enhancing peer interaction and learning in the classroom through reciprocal questioning. *American Educational Research Journal*, *27*(4), 664-687.

King, A. (1994). Guiding knowledge construction in the classroom: Effects of teaching children how to question and how to explain. *American Educational Research Journal*, *31*(2), 338-368.

Kohler, F. W., Ezell, H., Hoel, K. & Strain, P. S. (1994). Supplemental peer practice in a first-grade math class: Effects on teacher behavior and five low achievers' responding and acquisition of content. *The Elementary School Journal, 94*(4), 389-403.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. SAGE Publications India Pvt., Ltd.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leung, S. S. & Wu, R. (2000). Sharing problem posing and problem at home through diary writing. *Australian Primary Mathematics Classroom, 5*(1), 28-32.

Lowrie, T. & Clements, M. A. (2001). Visual and nonvisual processes in grade 6 students' mathematical problem solving. *Journal of Research in Childhood Education*, *16*(1), 77-93.

Mayer, R. E. (1987/1990). *Educational psychology: A cognitive approach*.
林清山（譯）。**教育心理學——認知取向**。臺北：遠流。

Mayer, R. E. (2000). Intelligence and education. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of intelligence* (pp. 519-533). Cambridge University Press. USA.

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2000). Learning mathematics from procedural instruction: Externally imposed goals influence what is learned. *Journal of Educational Psychology*, *92*(4), 734-744.

Medin, D. L., Ross, B. H. & Markman, A. B. (2001). *Cognitive psychology (3rd Ed.)*. Harcourt College Publishers. USA.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis (2nd Ed.).* SAGE Publications India Pvt, Ltd.

Mulligan, J. & Wright, R. B. (2000). Interview-based assessment of early multiplication and division. In Y. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, *V.4*, 4-17-24.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. USA.

Nickerson, R. S. (1994). The teaching of thinking and problem solving. In R. J. Sternberg (Ed.), *Thinking and problem solving* (pp. 409-441). Academic Press, Inc. USA.

Noddings, N. (1985). Small groups as a setting for research on mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving* (pp. 345-360). Hillsadle. NJ:Erlbaum.

O' Connor, M. C. (1998). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. In M. Lampert & M. L. Blunk (Eds.), *Talking mathematics in school. Studies of teaching and learning* (pp.17-55). Cambridge University Press, U.K.

Outhred, L. N. & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 144-167.

Phye, G. D. (2001). Problem-solving instruction and problem-solving transfer: The correspondence issue. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 571-578.

Reys, R. E., Suydam, M. N. & Lindquist, M. M. (1995). *Helping children learn mathematics (4th Ed.)*. Allyn and Bacon Asimon & Schuster Comapany.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking. Cognitive development in social context.* Oxford University Press, Inc. NY.

Ruwisch, S. (1998). " Doll's house" as a multiplicative real-world situation- Primary school children's problem-solving strategies and action patterns. In H. S. Park, Y. H. Choe, H. Shin & S. H. Kim, (Eds.), *Proceedings of the first international commission on mathematical institution east Asia regional conference on mathematics education, Vol.2,* 459-473. The

First ICMI-EAST Asia Regional Conference on Mathematics Education.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Sternberg, R. J. (1999). *Cognitive psychology (2nd Ed.)*. Harcourt Brace & Company, USA.

Swing, S. R. & Peterson, P. L. (1982). The relationship of students ability and small-group instruction to student achievement. *American Educational Research Journal, 19*(2), 259-274.

Vosniadou, S. & Ortony, A. (1989). *Similarity and analogical reasoning.* Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wagner, R. K. (2000). Practical intelligence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of intelligence* (pp.380-395). Cambridge University Press. USA.

Wagner, R. K. (2002). Smart people doing dumb things: The case of managerial incompetence. In R. J. Sternberg (Ed.), *Why smart people cab be so stupid* (pp.42-63). Yale University. USA.

Watson, A. (1998) *Situated cognition and the learning of mathematics*. Center For Mathematics Education Research. University of Qxford Department of Educational Studies. U.K.

Webb, N. M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. *International Journal of Educational Research*, *13*, 21-40.

Webb, N. M. (1982a). An analysis of group interaction and mathematical errors in heterogeneous ability groups. *British Journal of educational Psychology, 50*, 1-11.

Webb, N. M. (1982b). Group composition, group interaction, and achievement in cooperative small groups. *Journal of Educational Psychology*, *74*(4), 475-484.

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 366-389.

附件 1：討論解題階段與類比遷移解題階段之問題

一、燈謎佈置問題

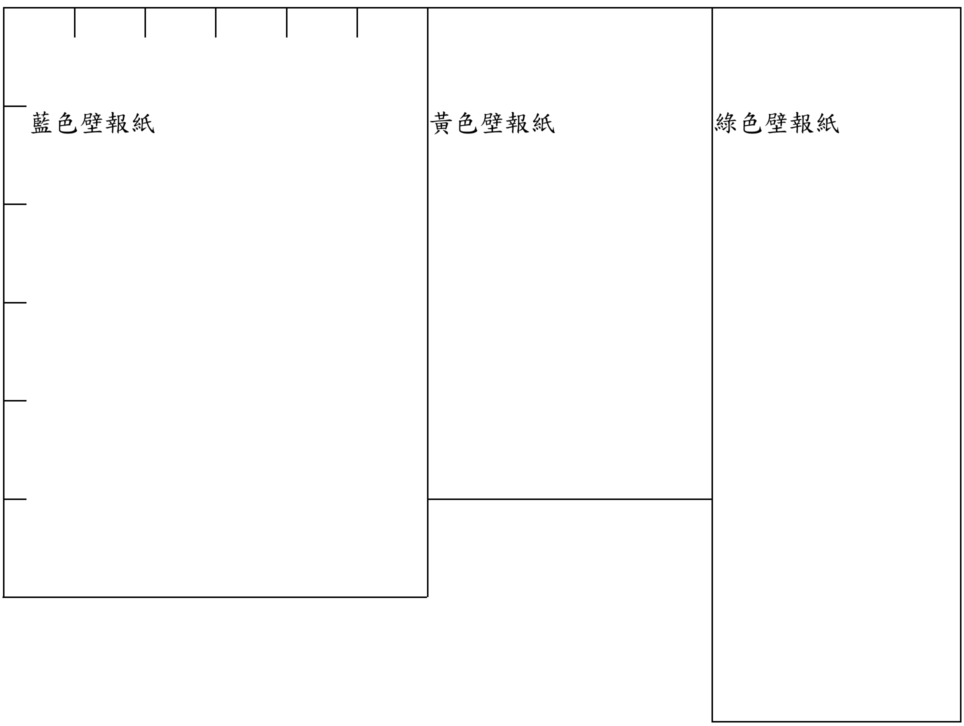
陳老師準備佈置猜謎大賽的材料，他將謎題答案分成動物類、植物類與地名類，三類謎題分別裝入不同顏色的信封。陳老師把動物類的謎題裝入藍色信封；植物類的謎題裝入紫色信封；地名類的謎題裝入綠色信封。每個信封的尺寸大小都一樣，長邊都是 15 公分，寬邊都是 9 公分。

三張壁報紙的長邊和寬邊可貼的張數分別是：

藍色壁報紙：將藍色信封貼滿，長邊可貼 6 張；寬邊可貼 6 張。

黃色壁報紙：將紫色信封貼滿，長邊可貼 5 張；寬邊可貼 4 張。

綠色壁報紙：將綠色信封貼滿，長邊可貼 8 張；寬邊可貼 3.5 張。



陳老師到文具店買信封。文具店裡出售的信封包裝有三種，分別有 8 張一包裝、6 張一包裝與 3 張一包裝。各種顏色信封不同包裝的數量，展現在下面：

藍色信封：	紫色信封：	綠色信封：
（8 張裝）6 包；	（8 張裝）7 包；	（8 張裝）7 包；
（6 張裝）7 包；	（6 張裝）8 包；	（6 張裝）8 包；
（3 張裝）12 包	（3 張裝）14 包	（3 張裝）14 包
⑧⑧⑧⑧⑧⑧	⑧⑧⑧⑧⑧⑧⑧	⑧⑧⑧⑧⑧⑧⑧
⑥⑥⑥⑥⑥⑥⑥	⑥⑥⑥⑥⑥⑥⑥⑥	⑥⑥⑥⑥⑥⑥⑥⑥
③③③③③③	③③③③③③③	③③③③③③③
③③③③③③	③③③③③③③	③③③③③③③

陳老師想買各種顏色信封都要買得剛剛好的數量，使貼滿壁報紙以後沒有剩下信封。請你幫他把各種顏色信封要買的包數填在採購單上。

採　購　單	
藍色：	紫色：
綠色：	

二、露營問題

陳老師班上有 30 位小朋友將要參加露營活動。他想到超級市場買一些用品：面紙、火種、紙盤、塑膠夾子、菜瓜布、竹筷、紙杯，分給小朋友。上述用品在超級市場陳售的包數如下：

面紙：(3 小包裝) 12 包 ❸❸❸❸❸❸ ❸❸❸❸❸❸	火種：(7 個裝) 7 包 ❼❼❼❼ ❼❼❼	紙盤：(5 個裝) 8 包 ❺❺❺❺ ❺❺❺❺
塑膠夾子：(6 個裝) 7 包 ❻❻❻❻❻❻❻	菜瓜布：(2 片裝) 16 包 ❷❷❷❷❷❷❷❷ ❷❷❷❷❷❷❷❷	竹筷：(8 雙裝) 7 包 ❽❽❽❽❽❽❽
紙杯：(4 個裝) 6 包 ❹❹❹❹❹❹	電池：(2 個裝) 5 包 ❷❷❷❷❷	

陳老師想讓每位小朋友都可以分得到每一樣東西，而且每樣用品都買得剛剛好，使分給 30 位小朋友以後，剩下的數量最少。請你幫陳老師把每樣用品要買的包數填在採購單上。

採　購　單		
面紙：	火種：	紙盤：
塑膠夾子：	菜瓜布：	竹筷：
紙杯：		

附件 2：類比遷移解題階段問題

一、運動會問題

陳老師教小朋友使用五種顏色的氣球，佈置運動會的凱旋門。凱旋門所需要各種顏色氣球的數量爲：紅色：30 個；藍色：23 個；黃色：16 個；綠色：9 個；白色：40 個。

商店中所陳售的各種顏色氣球包裝與數量如下：

紅色：(7 個裝) 5 包；(5 個裝) 5 包；(2 個裝) 10 包 ❼❼❼❼❼ ❺❺❺❺❺ ❷❷❷❷❷ ❷❷❷❷❷	藍色：(7 個裝) 3 包；(5 個裝) 4 包；(2 顆裝) 5 包 ❼❼❼ ❺❺❺❺ ❷❷❷❷❷	黃色：(7 個裝) 3 包；(5 個裝) 2 包；(2 個裝) 5 包 ❼❼❼ ❺❺ ❷❷❷❷❷
綠色：(5 個裝) 5 包；(2 個裝) 5 包 ❺❺❺❺❺ ❷❷❷❷❷	白色：(7 個裝) 5 包；(2 個裝) 10 包 ❼❼❼❼❼ ❷❷❷❷❷ ❷❷❷❷❷	卡通形氣球：(5 個裝) 5 包；(2 個裝) 5 包 ❺❺❺❺❺ ❷❷❷❷❷

陳老師想買氣球買得剛剛好的數量，使佈置凱旋門以後，剩下的數量最少。請你幫陳老師把各種顏色氣球要買的包數填在採購單上。

採　購　單	
紅色：	藍色：
黃色：	綠色：
白色：	

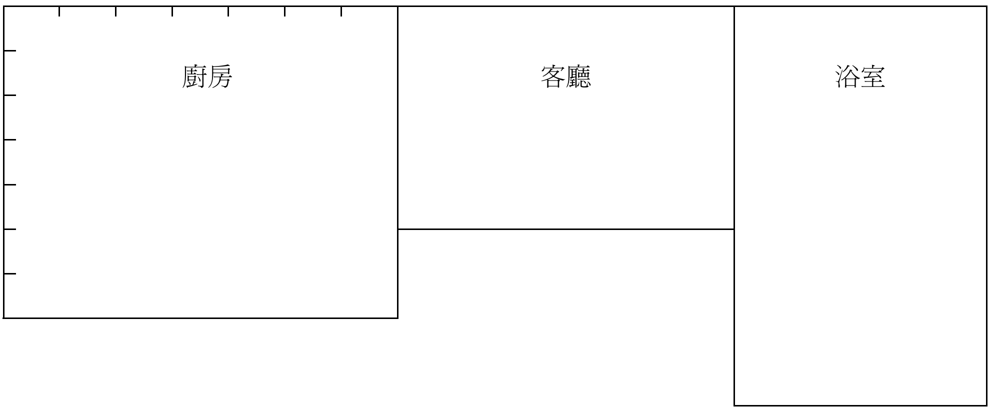
二、舖地板問題

小美和小芬使用三種不同顏色的玩具地板，一起幫娃娃家的廚房、客廳與浴室舖地板。三種顏色的地板尺寸大小都一樣，長邊都是 8.5 公分，寬邊都是 6 公分。娃娃家的廚房、客廳與浴室三個地方的大小分別是：

廚房：將藍色地板鋪滿廚房地上，長邊可貼 7 塊；寬邊可貼 7 塊。

客廳：將黃色地板鋪滿客廳地上，長邊可貼 6 塊；寬邊可貼 5 塊。

浴室：將綠色地板鋪滿浴室地上，長邊可貼 4.5 塊；寬邊可貼 9 塊。



小美和小芬一起到商店買玩具地板。商店裡玩具地板的包裝分別有 8 塊一包裝、6 塊一包裝與 3 塊一包裝。各種顏色的玩具地板不同包裝的數量，展現在下面：

藍色：	黃色：	綠色：
（8 塊裝）4 包；	（8 塊裝） 5 包；	（8 塊裝）5 包；
（6 塊裝）5 包；	（6 塊裝） 6 包；	（6 塊裝）6 包；
（3 塊裝）10 包	（3 塊裝）12 包	（3 塊裝）12 包
⑧⑧⑧⑧	⑧⑧⑧⑧⑧	⑧⑧⑧⑧⑧
⑥⑥⑥⑥⑥	⑥⑥⑥⑥⑥⑥	⑥⑥⑥⑥⑥⑥
③③③③③	③③③③③③	③③③③③③
③③③③③	③③③③③③	③③③③③③

小美和小芬想要買各種顏色玩具地板都買得剛剛好的數量，使鋪滿地上以後沒有剩下玩具地板。請你幫他們把各種顏色玩具地板要買的包數填在採購單上。

採　購　單	
藍色：	黃色：
綠色：	

三、同樂會問題

王老師的班上有 18 位小朋友，將要舉辦同樂會。王老師到便利商店想買五香豆乾、口香糖、軟糖、葡萄乾、米果、果凍、ＱＱ糖，請小朋友吃。上述食品在便利商店陳售的數量如下：

五香豆乾：（3 片裝）8 包 ❸❸❸❸❸❸❸❸	口香糖：（7 片裝）2 包； （5 片裝）2 包 ❼❼ ❺❺	軟糖：（5 個裝） 5 包 ❺❺❺❺❺
葡萄乾：（6 盒裝）4 包 ❻❻❻❻	米果：（2 片裝）12 包 ❷❷❷❷❷❷ ❷❷❷❷❷❷	果凍：（8 個裝） 3 包 ❽❽❽
ＱＱ糖：（4 小包裝）6 包 ❹❹❹❹❹❹	巧克力球：（3 顆裝）10 包 ❸❸❸❸❸ ❸❸❸❸❸	牛奶巧克力：（4 顆裝） 4 包 ❹❹❹❹

王老師想讓每位小朋友都可以分得到每一樣東西，而且每樣東西都買得剛剛好，使分給 18 位小朋友以後，剩下的數量最少。請你幫王老師把每樣東西要買的包數填在採購單上。

採　購　單		
五香豆乾：	口香糖：	軟糖：
葡萄乾：	米果：	果凍：
ＱＱ糖：		