

教育研究集刊

第五十一輯第一期 2005 年 3 月 頁 95-129

撲克牌融入因數教學之 創意教學行動研究

黃國勳 劉祥通

摘 要

針對兒童因數概念的學習困難，研究者分別設計了二個不同功能的因數教學活動，這二個教學活動從撲克牌遊戲改造而來。其中「因數 K 吉棒」於大班的課室進行教學，試圖強化與檢驗學生的因數概念；「因數對對碰」則進行小組的補救教學，用以強化「因數配對」的隱藏性知識。

本研究透過合作行動研究的方式，由第一研究者結合一位數學教育學者和一位合作教師組成研究小組，實際進入教學現場，透過不斷的討論、反省和辯證，以探討教學方案的實踐效果。研究發現，教學活動可使學童的數學知識與生活經驗產生連結，幫助多數學童強化因數的概念，並檢驗因數概念的理解。此外，透過佈題活動，學童從具體的活動反思得到抽象的因數概念，整合了因數的相關概念，促進了學童較深度的數學思考，並引發生產性的解題策略。

關鍵詞：創意教學、因數、遊戲活動

黃國勳，嘉義縣南新國小教師

劉祥通，國立嘉義大學數學教育研究所副教授

電子郵件為：liust@mail.ncyu.edu.tw

投稿日期：2004 年 9 月 6 日；修正日期：2004 年 11 月 12 日；採用日期：2005 年 1 月 7 日

Using Poker Games in Math as a Creative Means of Teaching Factors: An Action Research Approach

Kuo-Hsun Huang Shiang-Tung Liu

Abstract

In this cooperative-action research project, the authors developed two instructional activities using poker games with modified playing rules in order to help students learn the mathematical concept of factors. The first activity, integrated into regular math lessons, attempts to test and enhance students' understanding of factors. The second activity, employed in remedial lessons, intends to develop the students' implicit knowledge of factors. The authors, working with an elementary school teacher, observed two classes of fifth graders, one regular class and one remedial class, as they used the poker-game activities. This research team discussed and reflected on what they had observed in the classroom in order to evaluate the effectiveness of the students' math learning. The results indicate that the newly-designed activities may: (1) help students relate math knowledge to their daily life experience; (2) increase students' understanding of factors; (3) provoke students to derive more abstract math concepts; (4) assist students in assimilating related math concepts. In sum, given the students'

natural desire to compete and win their poker games, these activities motivate them to develop a deeper capacity for mathematical thinking and to formulate productive strategies for problem solving.

Keywords: creative instruction, factors, poker games, math instruction

Kuo-Hsun Huang, Teacher, Nan-Shin Elementary School, Chiayi, Taiwan

Shiang-Tung Liu, Associate Professor, The Graduate Institute of Mathematics Education, National Chiayi University

E-mail: liust@mail.ncyu.edu.tw

Manuscript received: Sep. 6, 2004; Modified: Nov. 12, 2004; Accepted: Jan. 7, 2005

壹、緒 言

在當前全球強調知識經濟、極重視創意的時代潮流中，我國推行的九年一貫課程也順應此趨勢，強調創新教學的精神，鼓勵教師發展創意教學，來完成課程改革的理想和培養優質的下一代，以提昇國家競爭力。所謂創意教學是指教師於教學過程中，能夠採用多元活潑的教學方式和多樣豐富的教學內容，激發學生內在的學習興趣，以培養學生樂於學習的態度和提昇學習的能力（吳清山，2002）。換言之，也就是教師在教學過程中能活化教材、活潑教學。實施創意教學的方式有很多，例如：運用資訊科技融入教學、使用多元評量的方式，或融合遊戲的教學活動等。其中，在兒童日常生活的遊戲中，都隱含著許多的數學概念（蔡文煥、林碧珍，1998a；Haigh, 1999），也能引起學童的學習興趣，營造輕鬆活潑的學習氣氛，因此將遊戲融入教學成了創意教學常見的方式之一。Sobel 與 Maletsky（1988）認為數學遊戲（mathematical games）是絕佳的教材來源，如果有效、多元地運用，它們不單可以激起學生興趣的娛樂設計，也是發展某些基本數學概念和技巧的有效方法。以常見的撲克牌遊戲而言，就可以協助教師營造一個有趣、豐富的課室情境，也能透過非例行性的活動發展最佳策略，並引導學童建立機率和統計等概念（Everitt, 1999; Haigh, 1999）。蔡文煥（2000）的研究指出：「撿紅點」遊戲有助於學童「湊十」策略的應用，同時可增進學童在校內之數學學習成就，提昇解決校外工作問題之能力。

教導學童理解因數概念，一直是研究者甚感困擾的單元之一。相關的研究（林珮如，2002；陳清義，1995；陳標松，2003；蕭金土，1995）指出：學童在學習因數時存有若干迷思概念，無法理解因數概念，以致產生學習上的瓶頸。研究者（黃國勳、劉祥通，2003）從教學的實務經驗和診斷學童因數教材迷思概念的實例中，亦發現部分五年級學童學習因數教材時，可能在認知運思能力、先備知識、生活經驗、語意理解和過程概念（pro-cept）等五個層面，產生學習困難的現象。綜合認知運思能力、語意理解和生活經驗三個面向來說，因數概念是由整除定義而來，屬於二階層的抽象概念，況且定義因數時「被誰整除」或「整除誰」的語意，不僅產生語意理解的困擾，因倍數之間的相對關係也容易產生混淆。此外，

在學生的生活經驗中，也缺乏與因數概念結合的活動。對學童而言，它只是一個獨立於生活之外的數學名詞，比較難透過具體的活動讓學生真正理解因數的意義。

從先備知識和過程概念二個面向來說，學童在整數除法的運算上有較多的困難（陳博文，1996），而找因數的運算歷程其實就是乘除法的計算，因此，要「窮盡」所有的因數，對乘法計算能力不足的學童而言，確實是一個艱苦的歷程。尤其對於比較大的數字，往往會遺漏較大的因數。這個現象若以 Gray 與 Tall（1993）提出的過程概念來看，「因數」是經由「倍數」除以「因數」的過程，再經整除的確認而得。此種概念含有隱藏的知識（tacit knowledge），但往往在教學中未被凸顯（朱建正，1997）。舉例來說，54 能被 3 整除，得到商數是 18，3 是 54 的因數，18 也是 54 的因數，因此，因數是以配對的方式出現。但是，18 和 54 的因倍數關係是隱藏的，往往未被學生注意，所以在找尋因數時無法以配對的方式（整除同時找到二個因數）來節省計算的過程，造成繁複的解題歷程，甚至在找尋因數時有所遺漏——找到了較小的因數「3」，卻漏掉了較大的因數「18」。

研究者基於解決教學實務的問題和呼應創新教學的精神，乃於 2001 年先發展「小學因數教學模組」，並進行大班課室教學，試圖取代教科書上因數教學活動的內容。之後，於 2003 年再發展「因數配對教學模組」來進行小組補救教學，希望幫助程度較差的學童建立因數配對出現的概念（黃國勳，2003）。其中，「因數 K 吉棒」和「因數對對碰」教學設計都是改造自學童熟悉的撲克牌遊戲，目的是希望藉此摒除紙筆測驗枯燥與壓迫的情境，使學童在遊戲中進行因數概念的練習與評量，以達到「寓評量於遊戲」的境地，並且幫助學童發展因數基本概念和獲得「因數配對」的隱藏性知識，以建立更周延的因數概念。

總結言之，研究者基於學童因數概念學習遭遇的困境，又受創新教學之鼓勵，乃前後發展了二個教學方案，以協助學童突破因數學習的困難。這二個經由改造的撲克牌遊戲融入教學活動並經課室實踐後，學生在教學實踐過程中的學習表現如何？二個教學活動在教學中發揮何種功能？此即為本研究所要探究的主要議題。

貳、研究方法與步驟

一、研究方法與流程

合作行動研究最能幫助研究者與教育實務工作者投身於教育現象本質的解析，並且能具體有效的發揮「將教育理論應用於實際」、「假實際經驗修正理論」的功能（甄曉蘭，1995）。因此，本研究採用合作行動研究的方式，由研究者結合數學教育師資培育者及基層教師組成研究小組，探討研究者自行設計的教學活動在教室實際情境中的可行性及效果。希望經由不斷討論、辯證、省思與修正的過程，發展適切可行的方案，以改善學生因數概念的學習。研究架構如圖 1。

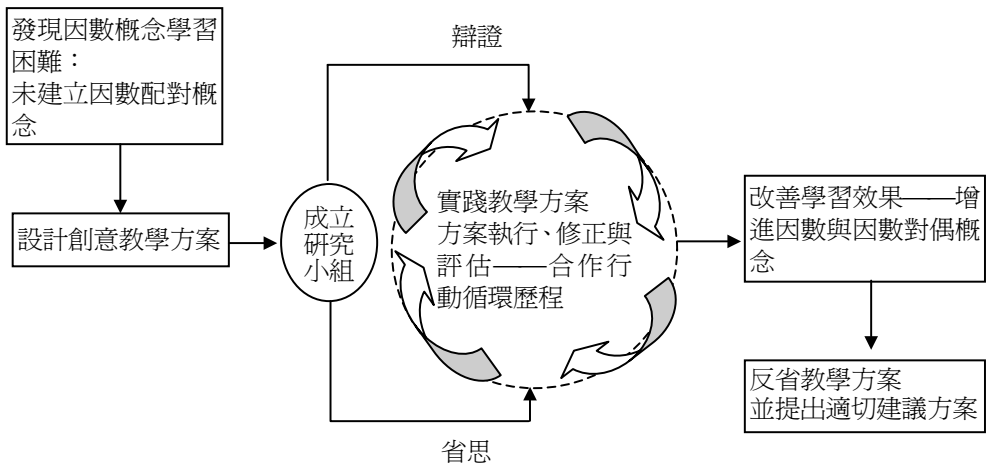


圖 1 研究架構圖

依此架構，研究者從多年的教學經驗與文獻的探討中，發現學童對因數概念的學習頗感困擾，繼之又發現學童未建立因數配對的概念，因此分別設計了創意的教學方案，試圖改善學童因數概念的學習情形。在尋得研究夥伴之後，便組成研究小組進行合作行動研究。在研究歷程中，小組成員不斷省思與辯證，以進行方案的修正、評估，同時確認教學方案的實踐效果，最後反省批判方案的設計與實踐情形，並提出適切可行的建議方案。

本研究二個教學活動分別是「因數 K 吉棒」和「因數對對碰」，它們都是研究者所發展的「小學高年級因數教學模組」（黃國勳，2003）中的活動。「因數 K 吉棒」活動於 2001 年 9 月進行大班的課室教學，實施流程是先由合作教師在其任教班級進行前導教學，教學活動結束後，研究小組依據上課的觀察記錄、錄音與錄影的資料和深度訪談資料，針對教學情況進行省思及辯證，反省改進之處與評估方案的效果，並共同協商出修正方案。研究者依據新修訂的內容回到任教的班級執行修正方案。同樣的，研究小組再進行方案的修正與評估，最後確認本教學方案的實踐效果，並提出適切可行的建議方案。「因數對對碰」活動於 2003 年 5 月進行小組補救教學，實踐的過程是由研究者擔任教學者，在教學活動結束後，研究小組依據上課的觀察記錄、錄音與錄影的資料和深度訪談資料，進行省思及辯證。反省教學活動的效果和需要改進的地方，共同協商出新的解決方案，並以學生的學習效果為重心，評估教學活動的可行性。

二、參與學生

參與「因數 K 吉棒」教學活動的學生，分別是黃老師（第一研究者）和吳老師（合作教師）所任教的五年級學生，他們經過等質編班（S 型編班法），程度應大致相近。因數教材對他們而言，是屬於新接觸的數學概念，也由於選用不同版本的教科書，以致課程銜接出現落差，他們在整數除法的計算或概念理解上尚未完全建立，所以求因數的計算練習對程度較差的學生來說，可能較為困難，對因數概念的理解，則可能更感困惑。

參與「因數對對碰」活動補救教學的學生，是原參與黃老師「因數 K 吉棒」活動的學生，此教學活動實施時他們已升上六年級，與黃老師將近二年的相處，彼此已非常熟稔。他們均未具備因數的過程概念，而過程概念的具備與否，是以擁有隱藏性知識作為判定之依據。經過測試發現不僅程度差的學生未具備因數的隱藏性知識，連中等程度的學生也有此現象。考量學童配合參與補救教學的時間，以及教學效果的評估，研究者從中挑選出中等程度學生（小雯和小庭）與中下程度學生（小亮和小成）各二名，作為補救教學的對象。其中程度最差的小成，是在教學活動進行中特別觀察的對象，作為教學決定和學習效果評估的指標。

三、研究小組成員

參與研究的人員共有三位，包括黃老師（第一研究者）、劉老師（第二研究者）和吳老師（合作教師），在研究過程中共同討論教學現場的問題、方案的修正和學習的成效。黃老師是研究問題的發動者，負責資料的收集、整理與分析，並擔任教學活動的設計、參與觀察和教學者的角色。劉老師目前是數學教育師資培育者，並親自至現場觀察教學情形，提供專業的指導與諮詢，在資料分析時，也參與檢驗原案分析的適當性。吳老師在「因數 K 吉棒」活動中負責前導教學的工作，於「因數對對碰」活動時擔任觀察者，並提供教學實務的意見。

四、學習效果的評估

本研究「因數 K 吉棒」活動於大班實施，學習效果的評估乃透過以下三個方式：檢驗學生的學習表現、觀察學生上課的反應情形和評閱學生數學日誌的內容，尤其是中低程度學生的部分（研究對象中小亮和小恬等人）。「因數對對碰」教學活動設計則用於小組的補救教學，由於學生僅有四位且程度差異明顯，教學時比較容易掌握學生的學習狀況。因此學習效果的評估，主要以程度最差學生（小成）的反應作為指標，且輔以深入訪談和數學日誌來瞭解學生的學習狀況。

五、資料分析

本研究採取參與觀察（觀）、座談（座）、討論（討）、深度訪談（訪）、學生數學日誌（誌）、佈題寫作單（佈）、研究者省思筆記（省）和隨堂札記（札）等方式來收集資料，資料內容包括上課的觀察記錄、上課錄音、錄影等轉譯資料，教學活動前後研究者、合作教師與指導教授的座談與討論記錄，兒童的數學日誌和佈題寫作單，以及研究者的省思札記等。資料分析採用持續比較法和三角校正來考驗學生的學習成效。實踐教學活動效果的評估檢閱學生的學習表現、觀察學生的上課反應，和評閱數學日誌，是為資料來源的三角校正。例如本文中研究結果：「（二）從『容易出的牌』的討論中，再度強化因數基本概念」的教學發現，先呈現觀察的小恬上課反應，再接著呈現小恬的數學日誌，以這二種不同資料來

佐證此教學發現。此外，再藉由參與研究人員的共同討論辯證，以避免研究者個人主觀的認定，則為參與研究人員的三角校正。

各種原案編碼的意義舉例如下：

1. (010912 黃討)：2001 年 9 月 12 日黃老師的討論記錄。
2. (010912 黃座)：2001 年 9 月 12 日黃老師的座談記錄。
3. (010912 札)：2001 年 9 月 12 日隨堂札記。
4. (010912 025 誌)：2001 年 9 月 12 日 25 號的數學日誌。
5. (010912 觀)：2001 年 9 月 12 日觀察記錄。
6. (010912 025 佈)：2001 年 9 月 12 日 25 號的佈題寫作單。
7. (010912 省)：2001 年 9 月 12 日省思札記。

參、創意的發想——活動設計的理念與內涵

本研究教學方案乃提供學生應用與建構因數知識的機會，就性質而言，「因數 K 吉棒」和「因數對對碰」二個活動是屬於應用性的教學活動，用以強化與檢驗因數和因數配對概念。它們都是將撲克牌遊戲改造後再融入數學教學的活動，目的是藉由學生喜歡玩的撲克牌遊戲來激發學習興趣，以避免反覆無味的計算練習，使學生對數學產生厭煩，甚至只知道計算的方法，卻不理解因數的概念。換句話說，也就是利用孩童喜歡遊戲的天性，佈置一個具有挑戰與思考的課室情境，讓學生在真實的情境中主動操作與探索，無形中持續不斷的進行因數計算練習，強化學童的因數概念，並透過佈題引導學生思考，提供鷹架幫助學生發展因數的概念。

Dienes (1960: 31) 強調：「『數學是關係的結構』 (mathematics as a structure of relationships)；且『有些數學概念，它們的數值之間有結構化的關係』 (structural relationships between concepts connected with numbers)」。因此，為協助學生建立數值之間的對應關係而設計的教材，其實就是「結構化的教具」 (Structured materials)。Miles (1992) 曾用一個百格版，十條條狀積木，與一百個小積木，分別解釋 1×100 ， 10×10 ， 100×1 的關係，也進一步闡釋不同「單位量的轉換」可以

得到不同的「單位數」，這些積木即為「結構化的教具」。本研究「因數 K 吉棒」的活動裡，12 這張牌（發牌數）與 1、2、3、4、6、12 等牌（跟牌數）之間，有結構上的對應關係。同理，在「因數對對碰」的活動裡，「1」和「72」、「2」和「36」、「3」和「24」、「4」和「18」、「6」和「12」以及「8」和「9」這些牌彼此之間也因為特意的設計，而產生結構上的對應關係。因此改造這二種撲克牌遊戲融入教學時，撲克牌也變成了結構化的教具。總之，在本研究的教學方案中，撲克牌具有重要的功能，它除了是學童遊戲的玩具，也是教師進行教學的教具，使數學的學習達到「寓教於樂」的目標。

原本「K 吉棒」的遊戲規則主要是「同花色比大小」、「出牌和跟牌」和「最先出完牌為優勝」。例如，先出牌者打出了「梅花 3」，後面跟著出牌的人也必須是梅花，而且要比 3 還大（如梅花 4），直到沒有跟牌者，即擁有新的發牌權。以此規則進行遊戲，看哪一家最先將手上的牌出完即為優勝者。因此，「K 吉棒」遊戲的出牌情形就以四種花色分為四個群組，如圖 2。「因數 K 吉棒」教學活動將「同花色比大小」改為「同一數的因數」才能跟牌，其出牌情形就以 1—13 這 13 個數分為十三個群組，如表 1。

「因數對對碰」活動改造自「撿紅點」遊戲，原本規則是「湊十」：「1 和 9」、「2 和 8」、「3 和 7」、「4 和 6」、「5 和 5」配對「互吃」，其他的大數 10、J、Q 和 K 則是自己配對，「撿紅點數字配對圖」如圖 3。以配對的方式出現是因數的一大特性（如圖 4「72 的因數分解圖」），因此，「因數對對碰」活動將「撿紅點」中「湊十」的規則修改為 72 的「配對因數」：「1 和 72」、「2 和 36」、「3 和 24」、「4 和 18」、「6 和 12」、「8 和 9」、「5 和 5」才可以配對「互吃」（5 雖非 72 的因數，但為了遊戲的順暢，必須保持撲克牌原來的張數，因此「5」這張牌沒有修改或排除。（如圖 5「72 的因數對對碰數字配對圖」）。希望透過此教學活動來發展學童「因數配對」的概念，使因數概念更為周延。



圖 2 「K 吉棒」出牌情形圖

表 1 「因數 K 吉棒」出牌情形一覽表

出牌	能跟的牌（出牌數字的因數）
1 (A)	1
2	1、2
3	1、3
4	1、2、4
5	1、5
6	1、2、3、6
7	1、7
8	1、2、4、8
9	1、3、9
10	1、2、5、10
11 (J)	1、11
12 (Q)	1、2、3、4、6、12

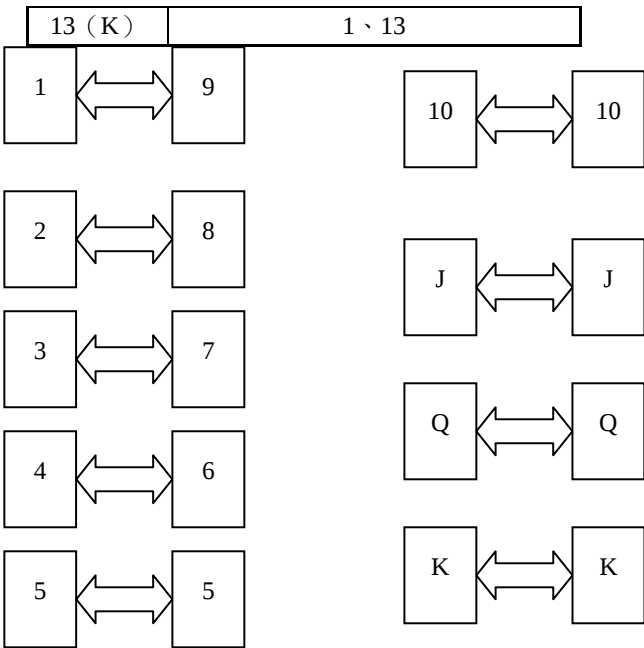


圖 3 撿紅點數字配對圖

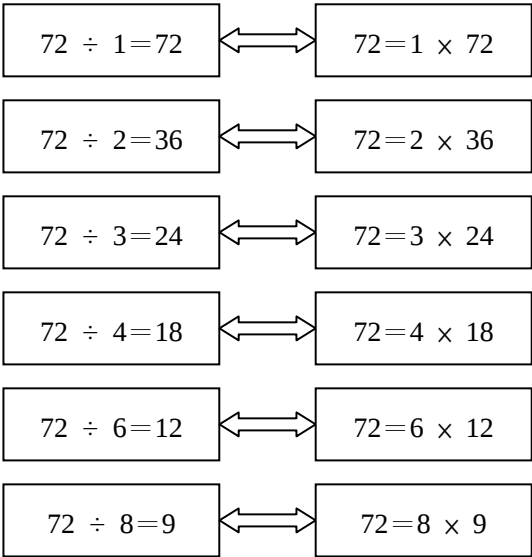


圖 4 72 的因數分解圖

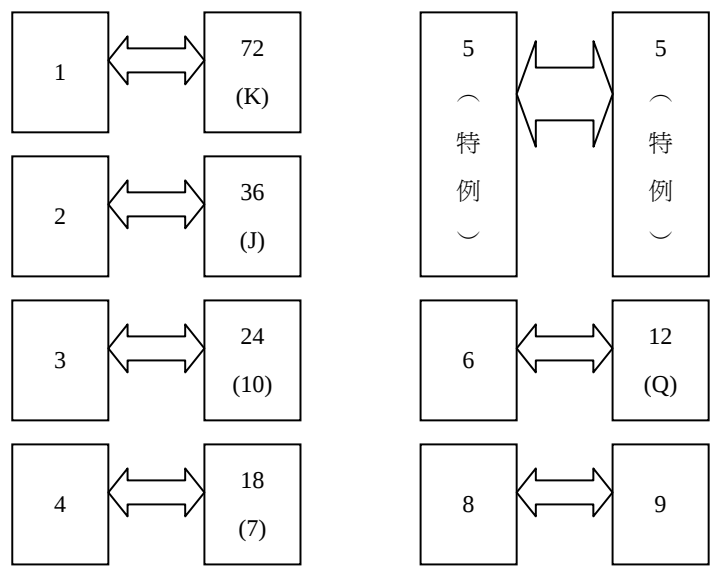


圖 5 72 的「因數對對碰」數字配對圖

肆、研究結果與討論

本研究最後提出的二個建議教學方案（如附錄一），乃初始方案演進的結果。在合作行動研究循環的歷程中，經由研究小組不斷反省、辯證與修正，將初始方案修正的較為適切可行，且更能發揮活動的功能。例如詳訂規則以符合實際教學的實行，討論出新的策略（如合作學習、堆疊牌和佈題活動）以豐富學生的學習內容。限於篇幅無法敘述方案演進的歷程，茲將二個活動實踐的結果分別敘述於下，並做方案實踐後的綜合討論：

一、實踐「因數 K 吉棒」方案的教學發現

在進行熱鬧滾滾的玩牌活動後，發現學生熱烈參與學習活動，除了達到既定的教學目標之外，透過佈題也引發學生深層的思考，學習的效果真令研究小組「喜

出望外」，教學發現分述如下：

(一) 學生從玩撲克牌遊戲中，即時糾正錯誤並反覆練習因數概念

本教學活動採異質性分組的方式，希望使教學順利進行，也使程度較差的學生有機會參與學習。前導教學後，吳老師對於班上學生提出較為深入的觀察：程度差的學生接受了程度好的學生的指導，以及出錯牌時引來其他組員的糾正。

「他們正在打 6 的因數，小浩打出了 12 這張牌，馬上被同組的對手小全糾正：『耶！6 的因數呢！12 又不是 6 的因數，6 才是 12 的因數咧！』小浩只好把 12 拿回去。我發現這個情形覺得不錯，學生在出錯牌時可以馬上被糾正，可以導正他們的觀念。」（010912 吳討）

吳老師觀察到的是：分組玩遊戲時，發揮「合作學習」的功能，程度好的可以隨時指導程度差的學生，提供立即回饋的機制，學生正確打出指定數的因數，便能安然通過，否則會馬上引來糾正的聲音。也就是說，學生在每打一張牌後，都能立即得知他所認為的數是否為指定數的因數。

在黃老師修正教學時運用新的策略是：學生出牌時順手將每個「出牌數」與「跟牌數」整理成疊，以便在每一局比賽後，再次提供學生練習找因數與檢驗的機會。其中，發現一個令人印象深刻的例子：小成（程度中下的學生）竟也當起主持人的角色（本是組長的工作），自信大方的問同組的組員。

原案一 2001.09.12

151 小成（該組程度最低的學生）：「9 的因數有誰？」（拿著撲克牌問同組的組員）

152 小輝：「1、9」

153 小成：「還有呢？」（小成一邊把手中 1 和 9 的撲克牌現出來，得意的提示小輝）

154 小輝：「還有 3。」

155 小成：「對了！那 12 的因數咧？」

156 小輝：「1、2、3、4、12。」

157 小成：「還有一個喔？」（小成一邊把手中 1、3、4 和 12 的撲克牌現出來，然後再提示）

158 小輝：「啊！還有 6。」（小輝也露出滿意的笑容）（010912 觀）

從以上的例子可知「堆疊牌——相互問答」策略發揮相當程度的作用，讓學生互相問答，從而互相監督或糾正，這樣的學習型態不僅學生之間有良好的互動，也是滿有效能的教學活動，使合作學習的機制運作又發揮了另一種效果。

透過如此頻繁的驗證過程，學生對於 1 到 13 這 13 個數的因數有哪些應該更清楚了，對於因數的意義也另有一番理解。此外，從教學的效能來看，透過學生的相互指導，優秀學生已然代替老師的角色，在各組的學習情境中，隨時「處理」著各種的狀況。從教學活動的功能來看，「因數 K 吉棒」活動讓學生從玩撲克牌中，再度複習整除與因數的概念，老師也可用以檢驗學生對因數意義的瞭解。

（二）從「容易打出的牌」的討論中，再度強化因數基本概念

在「哪些牌最容易打出去？」的討論中，學生們在老師的問話後，都隨即斬釘截鐵的回答。

原案二 2001.09.14

025 黃老師：「你們剛玩了撲克牌，你覺得哪些牌最容易打出去？」

026 學生齊答：「1。」

027 黃老師：「為什麼？」

028 學生齊答：「因為 1 是所有數的因數。」

029 黃老師：「還有哪些牌也是容易打出去的？小恬妳說說看？」（黃老師這次特別指定中低程度的小恬回答）

030 小恬：「2。」

031 黃老師：「為什麼？」

032 小恬：「因為 2 也是很多數的因數。」

033 黃老師：「比如呢？」

034 小恬：「2、4、6、8、10、12。」（010914 觀）

顯然的，學生們從打牌中理解了 1 是所有數的因數，所以「1」最容易打出去（行號 025 到 028）。程度中下的小恬也從打牌中理解了：2 是偶數的因數（行號 034）。課後的數學日誌小恬也寫著：

知道 1 到 13 的因數，1 是最好打出去的牌，因為每個數的因數裡都一定有 1。（010914 28 誌）

她先從打牌中察覺「1」是最容易打出去的牌，進而理解了「1」是每個數的因數。

Piaget（1970）認為個體的知識是藉由活動逐漸發展建構而成的，人類的知識就是在活動中不斷的發展，不斷的再建構，因此沒有活動就沒有知識的產生。從以上的原案可以得知：學童透過打牌的活動，經驗到 1 和 2 是比較容易打出去的牌，再經由佈題引導他們反思打牌與因數知識之間的關聯：1 是所有數的因數，2 是所有偶數的因數。這些概念建立的過程，與一般教學要求找出某一個數的因數的運思歷程正好相反，可使學生對於因數概念的思考更為多元。而這些概念都是從打牌的活動中自然發展出來的，他們從真實活動中建構出自己的知識，並藉由老師鷹架的協助，從活動中再抽離出概念。

（三）思考「難打出去的牌」時產生認知衝突，藉此釐清因數概念與引發出牌策略

進行「哪些牌較難打出去？」的小組討論時，第六組進行不甚順遂，黃老師於是介入了第六組的討論，扮演引導者的角色。首先提問：「哪些牌較難打出去？」學生們紛紛的說出「13」、「7」、「11」、「9」，但是接著曜鴻說出「12」時，引起黃老師的好奇與關注：

原案三 2001.09.14

051 黃老師：「還有哪些牌較難打出去？」

052 小鴻：「12 點。」

053 黃老師：「12 為什麼難打出去？」（追問曜鴻）

054 小鴻：「因為 12 只有別人出 12 時才可以打出去！」

055 黃老師：「那你手中如果有 12 的牌要先打出去嗎？」

056 小儀和小廷：「不要！」（同時立即明確的回答）

057 黃老師：「為什麼？」

058 小儀：「因為打 12 出去，別人就有很多支牌可以打了，不就幫了別人害了自己了嘛！」（010914 觀）

起初學生回答「13」、「7」、「11」、「9」這些數是最不容易打出去的牌，而「12」、「10」和「8」等數學生卻無法立即說出，這樣的情形是可以理解的。其中原因可能是受到「容易跟牌的數」的影響，舉例來說，學生們以為「12」這個數能「跟牌」的數（因數）很多，所以它不會難打出去。但事實上，哪些牌容不容易打出去與其因數的多寡並無關係，真正的關鍵在於它是否為很多數的因數。也就是說，這個佈題引發了學生的認知衝突——認為「難打出去的牌」其「跟牌數（因數）應該是少的」。於是黃老師回到講台，引導全班學生們探討這個問題：「手中的牌什麼情況下可以打出去？它出牌的機會有多少？」由同學先前談到的「13」、「11」、「7」這些數開始，接著再請學生思考「12」這個數什麼時候可以出牌？最後學生們發現原來 12 和 13、11 等數一樣，出牌的機會只有一個，就是只有別人出的牌也是本身這個數時，才能跟著打出去。因為「自己是自己的因數」和「撲克牌中沒有 7-13 的倍數，所以 7-13 這些數都很難打出去！」藉由這個佈題和引導，幫助學生釐清了哪些是難打出去的牌？為什麼這些牌難打？以及「自己是自己的因數」這個基本的概念。

在全班後續的討論中，學生也歸納出大的偶數（12、10 和 8）的因數比較多，所以不可以輕易打出去。小禎的學習日誌便強調這一個策略：

12 這張牌不能打，因為 12 的因數有很多，所以如果放出去可能會對自己不利，所以要放就要放對自己有利的。（010914 09 誌）

此外，這個佈題也激發了學生出牌的策略，在原案三中，小儀（行號 058）的意思是 12 這個數有很多的因數，隨意將 12 打出去，別人就可將手上是 12 的因數打出去，這便是她所謂的「幫了別人害了自己了」！因著競賽帶給他們求勝的

意念，進而反向思考 8、10 和 12 較大的偶數的因數有很多，雖然難打出去，卻不能亂打出去，否則會幫助別人出牌而害了自己！

(四)「藏牌」玄機——中低程度學生出牌的策略

在黃老師教學的現場，發生了一段插曲，程度普通的小亮被同組的牌友抗議他有「藏牌」的行爲：

原案四 2001.09.12

061 黃老師：「什麼是藏牌？」

062 小雯：「就是阿亮人家打 10 的時候，他明明有 2 卻不打出來。」

063 黃老師：「阿亮！你為什麼不把 2 打出去？」

064 小亮：「我其他的牌都不好打出去啊！我把 2 留著才能有機會換我發牌啊！」（阿亮一邊說著一邊拿出手中的牌給黃老師看，他手中的牌只剩下 2、7、11 和 9 四張牌）

065 黃老師：「什麼意思？」（黃老師乍聽之下不懂阿亮的意思。）

066 小亮：「就是說我 2 打出去了，剩下的就只能跟人家出了！」

067 黃老師：「跟人家出沒錯啊！？」（黃老師不懂阿亮的意思。）

068 小亮：「那我就不能贏了。」

069 黃老師：「那跟留 2 有什麼關係？」（黃老師還是不懂阿亮的意思。）

070 小亮：「ㄗ！ㄗ！2 比較好打出去啊，留著當『王牌』。」

071 黃老師：「王牌？什麼王牌？」（黃老師還是有點迷惑。）

072 小亮：「這個嘛，就是說把 2 留下來，等到最後別人的牌快出完了（意指容易打出去的牌）我再出 2，就換我發牌了。接下去我就可以一直出自己的牌了啊！」

073 黃老師：「原來這樣！」（黃老師終於懂阿亮的意思。）

074 小亮：「對啊！」（靦腆又得意的微笑著。）（010912 觀）

從行號 064 可以知道小亮手上的牌只有「2」這張牌是容易打出去的，其他三張牌（7、11、9）都是只有等待別人也出相同的牌時，才能跟著打出去。因此小亮認為不可以把 2 打出去，否則其他剩下的牌就只能跟著別人打（行號 066），如

此一來，他就沒有贏的機會了（行號 068）。最後，小亮終於解釋清楚 2 為什麼要「藏」起來了，原來他也懂得「忍住」跟牌的機會，直到別人把容易打的牌打完後，他才將留住的王牌打出去，以獲得發牌權。接著就可以將手上難打的牌打出去（行號 072），如此他才可能有獲勝的機會。小亮的說法著實給黃老師一些震撼，想不到以小亮的程度竟也能掌握玩牌的奧妙。或許平日他玩撲克牌遊戲經驗豐富，懂得王牌要在適當的時機出牌，才能掌握發牌權，製造有利自己的局面。此經驗他很快便轉換到這個遊戲上，運用了「藏牌」的策略。而此教學發現可貴之處在於，因數的撲克牌遊戲是他剛接觸到的玩法，他有此想法，至少表示他能分辨 1 到 13 這些數的因數的個數是不同的，有些數的因數較多，有些數的因數較少。在小亮的藏牌例子中，2 就是很多數的因數，而 7、9、11 就只有是自己的因數。

在理解了小亮的「藏牌」行為後，黃老師當下對全班說明「藏牌」的策略，並允許大家使用這個方法。之後，除了讚揚小亮外，也順便問問還有誰用這個方法。原來「藏牌」的策略不只發生在小亮身上，聰明的小涂也是箇中好手呢！他也隨後發表他的「秘訣」並非常得意的在數學日誌寫著：

我們一邊玩老師一邊問我們問題，我就說出了我的秘訣，我都先故意跳過去，等大家的牌都出完了我再出牌，就可以換我有發牌權了。（010912 15 誌）

以上「藏牌」的技巧其實隱含著因數相關概念的理解：「藏住 2 這張牌」代表瞭解 2 是很多數（偶數）的因數，所以容易打出去，可以暫時留住，不要隨便打出去，必要時才出牌以取得發牌權。這樣，才能將其他難打的牌 7、9 和 11 搶先出清。從認知學習的角度來看，「藏牌」也是將因數知識應用於撲克牌遊戲中，也可以說，他們從真實的活動中驗證了學校的數學知識，並結合了學校與日常生活的數學知識進行「致勝的思考」，這些都是這個撲克牌活動所發揮的功能！

二、實踐「因數對對碰」方案的教學發現

「因數對對碰」教學方案實踐的結果，發現學童在活動過程中可以流暢地「玩牌」，不致發生中斷或吃錯牌的情形。在後續的訪談也可以發現學生理解「因數配

對」的概念。

(一) 從玩「因數對對碰」的遊戲中再度強化與檢驗 72 的因數配對關係

進行「因數對對碰」的撲克牌遊戲之前，黃老師先讓學生們找出 72 的因數，以作為遊戲的先備活動。接著，黃老師介紹「因數對對碰」的遊戲規則，興致勃勃的學生們很快的瞭解規則，也很快就進入狀況。

第一回合玩遊戲時學生就能順暢完成，沒有遭遇阻礙。例如，小成在第一回合時，手上拿到的六張牌分別是黑桃 5、梅花 9、黑桃 4、方塊 2、方塊 A (1) 和紅心 18，他能辨別「多少配多少」的關係，在「因數對對碰」的遊戲中沒有發生「吃錯牌」的情形：

原案五 2003.05.08

(第一次) 出紅心 18 吃方塊 4，機會牌翻到黑桃 12 沒得吃。

(第二次) 出方塊 A 吃黑桃 72，機會牌翻到梅花 5 沒得吃。

(第三次) 出方塊 2 吃梅花 36，機會牌翻到紅心 9 沒得吃。

(第四次) 出黑桃 4 沒得吃，機會牌翻到紅心 2 吃黑桃 36。

(第五次) 出黑桃 5 沒得吃，機會牌翻到梅花 8 沒得吃。

(第六次) 出梅花 9 吃到梅花 8，機會牌翻到紅心 36 吃黑桃 2。(030508 觀)

在玩牌的過程中，必須先辨認 72 各因數的配對關係，才不會有吃錯牌的情形（如以紅心 24 吃方塊 4）。雖然小成在第二次和第三次出牌時，很快就將可以吃到低分的方塊 A 和方塊 2 去吃沒有分數的黑桃 72 和梅花 36，這樣的「玩法」很不高明，完全沒有「致勝」的考量——沒有等待「最佳」的時機才出牌（等紅色的 72 和 36 出現再吃）。但從這個觀察可以知道小成心中有因數配對的關係，只是沒有獲勝的策略，也許還需要多一些的練習他才能體會箇中的訣竅。

從學生們一輪到自己出牌時，便能很快打出牌且沒有吃錯牌的情形看來，他們對於 72 各因數的配對關係顯然已經建立的相當穩固。此外，他們打牌時那種全神貫注且胸有成竹的神情，是進行數學學習時所罕見的。

打完第一回合，劉老師提出一個建議：學生們打牌的時候，每打出一張牌或翻開機會牌時，可以請他們喊出「多少吃多少」（例如 18 吃 4），這樣可以瞭解學生的想法是否正確，也可以讓我們方便觀察。於是，第二回合開始，學生除了一邊打牌、翻牌外，還要將所要吃的牌喊出來，這樣確實更能發揮這個遊戲的功能，並使心中的想法透過語言表徵出來——「學生們打牌時都能正確喊出他們所要吃的牌，顯示學生都知道 72 的因數配對的情形！」（030508 劉討）

National Council of Teachers of Mathematics（2000）強調有效的數學教學必須要有一個挑戰和支持的課室環境。所以在學習的過程中，不應只是在上課剛開始引起學習動機，而是讓學生都處於刺激、挑戰與腦力激盪的情境中，一直保有學習的「續航力」，才是學習成功的基礎。「因數對對碰」就是透過遊戲來提昇學生的學習興趣，使他們全神貫注、積極參與教學活動。撲克牌的高度娛樂效果讓學生忘情於此，而不覺是在上數學課！這似乎是一種可以減少數學學習挫折的處方呢！（030508 省）

（二）小成能窮盡並理解 72 的因數配對概念

在「因數對對碰」的活動結束後，黃老師訪談四位學生中程度最低的小成，以再次確認這個教學活動是否有效：

原案六 2003.05.08

201 黃老師：「3 可以吃多少？」

202 小成：「24！」

203 黃老師：「為什麼 3 可以吃 24？」

204 小成：「因為 3 是 72 的因數，24 也是 72 的因數。」

.....

212 小成：「72 等於 3 乘以 24。」

213 黃老師：「意思是什麼？」

214 小成：「因數分解！3 和 24 都是 72 的因數。」（很流利的說出）

215 黃老師：「很好！你再說說看 72 還可以怎樣因數分解？」

216 小成：「6 乘以 12，4 乘以 18……」（停頓了一會兒）

217 黃老師：「你再重頭開始算比較不會漏掉。」

218 小成：「2 乘以 36，3 乘以 24，6 乘以 12，8 乘以 9，1 乘以 72，4 乘以 18。」

219 黃老師：「4 乘以 18 意思是什麼？」

220 小成：「4 和 18 都是 72 的因數。」

221 黃老師：「為什麼？」

222 小成：「72 除以 4 等於 18，72 除以 18 等於 4。」（030508 訪）

從小成的回答（行號 218 和 220），知道他能以因數分解的方式來窮盡 72 所有的因數，也理解因數配對出現的關係（行號 222）。教學至此一階段的效果，可以說已達到原先設定的教學目標，學生們已懂得運用因數配對的簡便法來找尋因數。

三、綜合討論

由前述的教學發現，可知二教學方案確實發揮強化與檢驗因數概念的功能。以下再從學生於撲克牌遊戲中的「算牌」表現所引發的策略性思考，做進一步的探討與分析。其次，再反省檢討教學方案的設計、實踐與成效。

（一）牌局中的精算師——激發學生策略性的思考

雖然參與「因數對對碰」教學活動者都是中等程度以下的學生，但在活動中透過佈題使他們更深入的思考。例如，小庭針對「你希望拿到哪些牌？為什麼？」這個問題，寫下了：

拿到四張「1」和二張紅「72」。因為如果拿四張「1」和二張紅「72」，就先出紅「72」一張，而四張「1」在我這裡，所以他們就不能吃紅「72」。（030508 小庭佈）

紅「72」在「因數對對碰」中是最高的分數，吃到二張紅「72」就得到 144 分了，早已贏了許多分。解析小庭的想法：拿到四張「1」和二張紅「72」，其實是想吃到二張紅「72」，這個的想法寶貴之處在於不只是拿到紅「72」而已，她還理解到如何運用「配套」的策略來使自己可以穩穩的吃到紅「72」。她的想法是：

已經拿到四張「1」和二張紅「72」，自己就先出紅「72」一張，因為四張「1」在自己手上，所以別人就沒有機會吃到紅「72」了。換句話說，小庭已經認知到紅「72」對於致勝的重要性，她也能周延的思考讓自己如何吃到。

小雯對於「什麼情況下你就可以成為超級大贏家？」這個問題的回答，則更詳細、更具體的說出三個想法：

什麼情況下你就可以成為超級大贏家？

- (一)拿到四張1，和兩張紅72。因為大家都有牌，就算我第一張打72，也不會被吃，這樣兩張72合起來是144，再加其他的，就可以變成超級大贏家。
- (二)還有一種是全部的72都在手上，加上兩張1，因為4張72都在我這，就算我放1，也不會有人吃，如果我放黑的72，別人吃了也不算分，所以也可以當超級大贏家。
- (三)兩張72黑紅各一張，1張黑的1，1張36和6，因為我們可以先把36和6打出去，等每人剩四張牌時，可以打一張72黑的72，如果對手有1張紅1，大約不會吃，最後打到對手逼不得已打了1張紅1，或72，就可以吃掉，變成超級大贏家。

(030508 小雯佈)

小雯的第一個想法與小庭的想法相同，拿到四張「1」就可以穩穩的吃到二張紅「72」。第二個想法則與第一個想法類似，這次是拿到四張「72」和二張「1」，她先把「1」打出去，四張「72」在自己手上，就可以一定吃到紅「72」。她還進一步考慮到：就算她打的黑「72」被別人吃去，也不會增加別人的分數，因此可以成為超級大贏家。小雯第三個想法中只拿到一張紅「72」和一張「1」，並不一定可以吃到二張紅「72」，而變成超級大贏家。雖然不像第一和第二個想法來得周延，但是在這個想法裡有自己形成的假設：等每個人剩四張牌時，可以先打一張黑的「72」。如果對手有一張紅「1」，大約不會吃，最後打到對手逼不得已打了一張紅「1」或「72」，我就可以吃掉，穩變成超級大贏家。就實際情形來看，除了

像第一和第二個想法是能掌握吃到紅「72」的之外，想吃到高分的牌，還牽涉到別人拿到什麼牌？別人翻到什麼牌？以及自己翻到什麼牌？所以第三個想法（推測）雖然是一個不圓熟和不成功的「假設」，但透過這個佈題讓學生有機會去反思學習的內容，更能整合所學得的知識。而在反思的歷程中，爲了想出「致勝」的策略也是一種較高層次的思考。

前述曾提到「因數 K 吉棒」的「藏牌的玄機」，這齣絕妙好戲的續集更精彩呢！聰明的小巫在數學日誌寫下了黃老師觀察不到的層面：

小亮說最後才出牌，我就想到也可以算牌，例如，「 $Q=12$ 」它的因數有「1、2、3、4、6、12」，一個數有 4 張牌， $6 \times 4 = 24$ ，就算到 23 張，那時候就可以出牌了。（010912 04 誌）

在小巫所謂的「算牌」的策略中，必須先理解因數的意義並進一步找出 12 所有的因數，然後結合「1 張牌有四種花色和 12 的因數有 6 個」，所以總共有 24 張牌，精確的算出已經出了 23 張牌後，便能穩穩獲得發牌權。撲克牌遊戲是一種具有結構且能立即完成數學目標的活動，學童可以透過遊戲中社會互動的歷程獲得經驗重組的機會，有助於相關概念的連結（蔡文煥、林碧珍，1998a，1998b）。小巫在小亮說出「藏牌」的策略後，觸發他「算牌」的想法，使玩牌與因數知識相結合，也拓展了他的數學思考。

另外，針對黃老師的第三個佈題——「手中握有哪些牌可以穩操勝券？」，小恬有令人覺得驚奇的佈局能力與打牌的策略：

手中握有哪些牌可以穩操勝券？

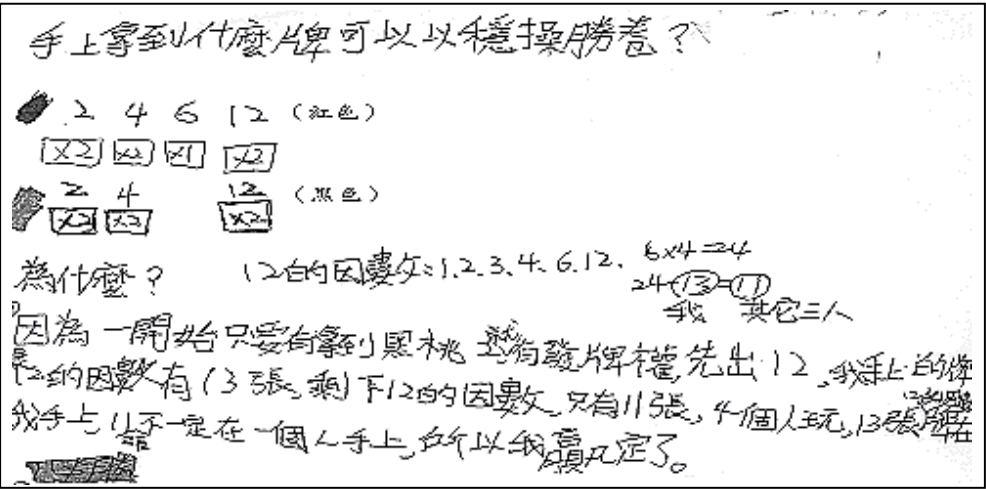
黑桃 2、1（兩張）、12、2、3、4、6（兩張）、10（兩張）、5（兩張）

我會覺得拿到這些牌會穩贏。因為：你拿到黑桃 2 就可以先放（意指擁有發牌權），就先放 12，再把 12 的因數全部放出去，再放 10，再把 10 的因數全部放出去就贏了。（010914 28 誌）

小恬能掌握題目的要旨，知道從手中拿到的 13 張牌來佈局：首先她知道拿到黑桃 2 以便取得發牌權來控制整個局面（誰先拿到黑桃 2 者即擁有第一次的發牌

權。)。接著，打出 12 這張牌，使自己大多數的牌（1、2、3、4 和 6）都能跟著打出去。最後，再打出 10 這張牌，讓本身剩下的牌（5 和 10）都能出清。這樣一路控制整個局面，她便是最後的贏家。總之，她能從整體的觀點來思考出牌的順序，讓自己一直保有發牌權的優勢，最後便能取得勝利。以小恬平常的數學表現能寫出如此具體且明確的想法，真令人欣慰與感動！因為這樣的思考已超乎了簡單的求因數的計算方法和因數意義的理解，而是一種綜觀全局，仔細分析出牌的流程的高層次思考能力。

小恬這樣的想法看起來像是個「天衣無縫」的牌局，不過，嚴格來看，在打牌的沙場上，不應只是顧全自己而已。更高的境界應是能掌握對手的戰情，才能「知彼知己，百戰百勝。」反應敏捷的小巫精算的程度可不止於此，他思考出了「先發制人」的策略，再度展現「算牌」的功力，精準的算出敵我的「實力」，讓整個局勢都在掌握之中：



(010914 05 佈)

小巫的想法是希望拿到：2 黑色和紅色各二張（四張），4 黑色和紅色各二張（四張），12 黑色和紅色各二張（四張），6（1張）。也就是拿到 4 種數字的牌（2、4、6 和 12）且都能集中火力（2、4、12 各四張），這便是他心目中的「理想牌」。更詳細的說，在 1 至 13 的數字中，12 的因數最多，因此他選擇的牌都是 12 的因

數。12 的因數共有 6 個（1、2、3、4、6、12），每個數字有 4 種花色，一共有 24 張牌，其中他獲得了 13 張牌（四張 2、四張 4、四張 12 和一張 6），其他三人也只拿到剩下的 11 張牌。而黑桃 2 又在自己手上，因此握有第一次的發牌權。首先，他知道拿到黑桃 2 以便取得發牌權來控制整個局面，這時，他知道先出 12 這張牌，就可以讓自己一路衝鋒陷陣到底，完全沒有讓對手有喘息換其他牌的機會，如此「輕舟已過萬重山」，所以他「贏定」了！難得的是，他還從其他三個對手的角度來思考「戰場的情勢」——自己 13 張牌可以出，其他三人合起來也只不過 11 張牌可以出而已，因此勝負可以立判。換個角度來看，他雖然只取簡單的幾種牌，但這些牌彼此相關聯（都是 12 的因數），也是重要且關鍵的，加上取得主動進擊（黑桃 2）的機會，因此可以一鼓作氣，讓對手毫無招架之力。

「算牌」是撲克牌遊戲中致勝與否非常重要的關鍵，因為懂得算牌才能知彼知己，也才能掌握牌局發展的情況。學生們能將算牌的技巧應用到改造的教學活動上，是可喜的地方。從另一角度來看，算牌也是種策略性的思考，考慮面向之廣，思慮程度之深，其實已超乎了學習形式數學知識的思考。因為相較於一般教科書上的習作練習，只是提供學生找因數的練習，學生也許反覆練習就可以得到滿意的結果，但是從中卻無法這般發展學生高度的數學思考。而學生們善於算牌，評估情勢的特質，已是將因數的知識融於策略應用的一部分，這樣的思考正也是結合了學童日常生活的數學經驗與學校的數學知識。

（二）教學方案成效之評估與檢討

本研究二個教學方案經實踐的結果，學生們學習氣氛熱絡，主動參與學習的活動，完全不覺得是在上數學課，與傳統講述法表現出無趣與被動的反應，實在大異其趣，如此專注積極的學習態度，為學習成效奠下良好的基礎。誠如研究小組所觀察的，在「因數 K 吉棒」活動中，大多數學生都能獨立完成打牌的活動，也就是他們能理解因數的意義——分辨是否能整除，再確認是否為指定數的「因數」。在打牌的過程中，其實是個抽象思考的歷程，學生們必須先瞭解某一個數是否能整除「指定數」，而後才確認是否為「指定數」的因數。他們也必須理解能整除「指定數」的數，才可能是「指定數」的因數，無法整除「指定數」的數，就不可能是「指定數」的因數。學生能正確打出牌，基本上，他們已將整除的概念

與因數的意義連結成功。同理，在「因數對對碰」活動中，四個參與補救教學的學生都能正確的打出所對應的因數配對牌，在活動後的深入訪談小成的結果，也能具體明確的說出因數配對的理由。因此，這個二個教學活動發揮了持續強化與檢驗因數概念與因數配對的功能。

就如 Nesher (1986) 所指出的：認識程序與演算法也可以增進概念的瞭解。Piaget (1985) 也認為：不斷透過程序、行動 (action) 與運算 (operation) 過程可以理論化為思考的物件 (objects of thought)。Gray 與 Tall (1993) 更進一步強調：從操作數學程序 (procedure) 進入可操作的心理物件 (mental object) 的認知改變，是學習數學概念最重要的過程。本研究「因數 K 吉棒」和「因數對對碰」二個教學方案，讓學童從打撲克牌的過程中操作乘法或除法的演算與程序，分別先理解因數和因數分解的概念，並將所得知識應用於打牌活動。這個歷程中學生不僅操作因數的程序而已，還將因數概念當做心理物件予以抽象運思。在這樣遊戲情境的佈置下，讓學童持續地強化因數和因數配對的概念，以及活用所學得的因數知識，加深了因數概念的理解。此外，結合佈題活動也使學童有機會進行反思及深入的思考，並發展許多策略，連結了學校與日常生活的數學知識。這些學習表現除了程度好的學童（如小巫）有著超級的演出——精準的算牌思考和傑出的致勝策略等，中低程度的學童（如小亮、小恬和小成等人）也有著令人驚喜的表現——歡樂之中建立相關因數知識與因數配對概念。整體而言，學童的學習效果良好。

這二個教學方案雖然實施成效佳，但在以下二個層面對學童之學習可能有負面的影響：第一，獲勝是遊戲教學過程中學童學習動力的來源，而致勝的關鍵除了機運和靈活的頭腦之外，玩牌經驗的豐富與否仍然影響學童出牌時的思考，小亮的藏牌策略便可能是他豐富的玩牌經驗有效遷移所致。但其他程度不錯卻缺乏類似玩牌經驗的學童，在初步的打牌經驗中，可能因為對於規則或經驗的不夠熟悉，導致玩牌的挫敗感。例如，在進行「因數 K 吉棒」遊戲時，黃老師班上程度不錯的小伶，就因之前完全沒有玩過類似的撲克牌遊戲，加上她所搭檔的隊友（程度較低）也缺乏此經驗，以致他們「屢戰屢敗」，在玩遊戲的歡喜臉上也難掩失望的神情。雖然在活動後的訪談和日誌中，她並未因玩牌的失敗而覺得「不好」，

還是感到非常有趣，但此較為負面的感覺還是在學習過程中衍生。第二，在本研究二個方案結束教學之後，學童都因撲克牌引入教學情境而啟動了玩牌的風潮，課後時間仍然樂此不疲。這個現象雖然可更穩固學童的學習效果，但缺乏老師引導或督促的情形下，學童可能荒廢了其他知識的學習。以上因著教學方案可能產生的負面影響，未來在實施這二個方案時，老師應該多所注意與防備。

畢竟沒有一個教學方案是十全十美毫無瑕疵，本研究教學方案也不例外，仍有其發展空間或改善之處，以下為本研究二個教學方案設計與實踐的檢討：

數字大小影響著因數之計算與判斷，數字越大運算和判斷的難度越高。「因數 K 吉棒」方案所使用的數字較小(1 至 13)，如此未能進一步提供較高難度的練習，與對較大數字因數概念的檢驗。再者，只限定打出牌數之因數，未能提供學生經驗因數和倍數的互逆關係，例如可以提供學生「3 是 12 的因數」的經驗，卻缺乏「12 也是 3 的倍數」的相對思考，是修正教學方案時可以再加深加廣的地方。此外，本活動也無法凸顯因數配對的概念，因此需再設計因數對對對碰的方案，以補其之不足。

「因數對對碰」方案設計僅以 72 作為因數配對遊戲的數字，可能不夠周延，若以其他較大的數字進行遊戲時，是否能產生學習遷移的效果，則尚待考驗。另外，本活動僅以四位學童作為補救教學的對象，若有更多學生加入，則能蒐集更豐富的資料。

本研究以質性的方法來蒐集與分析資料，主要以中低程度學生的學習表現，來作為檢驗學習效果的指標，整體而言，成效良好。但受限於研究小組的人力，教學中進行的觀察工作，無法每一組或每一個學生都兼顧得到，因此可能有所疏漏。此外，若再增加量化的資料，作為檢驗的證據，會使學習效果的考驗更為周延嚴謹。

伍、結論與建議

實踐本研究二個教學活動所得之結論與建議如下：

一、結論

本研究教學活動付諸實踐的結果，發現這二個改造的撲克牌遊戲發揮了相當大的功能，可作為強化與檢驗因數概念的機制。茲將本研究之結論敘述如下：

(一) 改造撲克牌為「結構化」的教具，提供了檢驗與強化因數概念的機制

日常生活中的撲克牌遊戲都有其遊戲規則，因此在各種的撲克牌遊戲中每張牌的意義都不盡相同。在本研究的教學活動中，修改「K 吉棒」和「撿紅點」的遊戲規則，以對應因數的概念。在此，撲克牌已轉化為「結構化」的教具，蘊含著數學知識的學習。對學童來說，在玩撲克牌的過程中，即是持續地練習因數的相關概念。對教師來說，觀察學童的打牌行為，也可進行學童因數概念的檢驗工作，研究小組觀察學生打牌，便是檢驗學生因數概念理解的一種評量形式。

此外，分析學童打牌的運思歷程，他們必須先辨別手中的牌哪些是可以「出牌」的（即是否整除要跟牌的數）或哪些是可以「吃牌」的（即是否為因數配對的數），然後才出牌。也就是說，透過活動的操作（實踐）可以讓學生經驗種種的因數概念，再藉由經驗後的反思，使學生的因數概念更為成熟。情境認知學者強調「知識即工具」，學習者若能夠把所獲得的知識當成工具主動的使用，不僅可以改變使用者對世界的認識，也會對工具（知識）有更深刻的瞭解（黃幸美，2003）。本研究在教學情境佈置上，主要提供學童主動使用所學得因數知識的機會，因為在無法預料且詭異多變的牌局中，學童必須立即且反覆的思索，並應用學得的因數知識來打牌。也可以說，撲克牌遊戲是一種具有結構且需立即完成數學目標的活動（蔡文煥，2000），學童於無形之中已將學得的因數知識當成「武器」，他們必須彈性地思考與運用這些數學知識才能產生致勝的策略。同時，學生不斷的在撲克牌遊戲中使用因數的知識，對於因數的特性將更清楚掌握，使學生更深入理解因數的概念。

(二) 競賽式遊戲結合佈題活動，可以擴展學生的思考層次

競賽式遊戲除了引起學童熱絡的學習氣氛之外，更重要的是無形的激勵動力——學童為了獲得勝利，「逼迫」自己想出好的策略。當然策略的優劣與學童的智

能、經驗有密切的關係。但遊戲教學所著重的並非遊戲結果的輸贏，而是遊戲過程中展現引發學生的種種思考與表現(饒見維，1996)。前述學生種種的學習表現，也都是「致勝」的這個誘因所引發的，並帶給學生們不一樣的刺激。Sobel 與 Maletsky (1988) 就認為學生在競賽式的數學遊戲中形成假設並考驗假設，進而發現致勝策略的思考型式，便是問題解決最重要的要素。本教學活動透過競爭遊戲促使學生產生致勝的策略，提供學生深度思考與運用數學知識的機會，對於這些學生因數概念的學習是有助益的。

另外，這二個教學活動最大的特色是希望藉由佈題活動，提供學生反思打牌與因數知識的關聯，進而強化因數的概念。實際執行本研究「因數 K 吉棒」佈題的結果發現，除了可作為學童溝通、討論的平台，也引導他們在打牌的歷程中進行另一個方向的思考。本研究發現學童在佈題活動的表現，能夠跳脫單純因數的概念和計算，以統合的觀點來理解因數的相關概念因數，並創造出致勝的絕佳牌局，例如小巫的數學日誌。但也不可否認的，相較於「因數 K 吉棒」活動中學生思考的表現，在「因數對對碰」活動的過程中，受限於參與學生程度較低，思考的層次是較低的。雖然小雯等人在佈題活動的表現思慮有不夠周延的地方，但是藉由佈題活動也激發他們進行數學思考。

總之，本研究二個競賽式的撲克牌遊戲結合佈題活動，提供學童解「非例行性」問題的機會，因而引發許多「生產性」的數學解題策略，促進了學童主動理解因數的概念，引發他們深度的思考，並建構了屬於自己的數學知識。

(三) 撲克牌遊戲融入教學，連結了學校與日常生活的數學知識

以功能而言，本研究「因數 K 吉棒」和「因數對對碰」二個教學活動設計不只是一種文化活動或遊戲，而是將遊戲數學化，也將數學遊戲化了，達到了寓教於樂的目的。此外，將文化活動轉化為數學教學活動，可以激發學童強烈的學習動機，奠定學習成功的基礎。本研究中學生在玩撲克牌的遊戲過程「藏牌」、「算牌」和「穩操勝券」的表現，都顯現出學童為了致勝而主動積極的理解因數的知識，和進一步設想打牌的策略。在這樣的歷程中已讓學校與日常生活的數學知識結合在一起，二者相輔相成達到良好的學習效果。

二、建議

茲對教學活動設計和未來相關研究提出三點建議：

(一)實施本研究「因數 K 吉棒」教學活動時，受限於撲克牌數字較小，僅讓學生進行 1 到 13 等數字的因數練習。建議教師教學時可以自行製作紙牌教具，重新改編數字（如改變成二組 1—26），使數字變得大些，也可以修改遊戲規則（如跟牌時一次不只出一張），以提昇活動的難度和豐富學習內容。同時可進一步研究當數字變大或不同的遊戲規則時，學生學習的情形是否受到影響。

(二)本研究教學方案設計與實施的背景是 1996 年版課程，該課程綱要強調簡化教材內容，因此教學的內容僅止於基本的因數概念，其他延伸的相關概念，如質數和合數的概念，並未在教學目標之中。為了補足這二個概念，仍可透過「因數 K 吉棒」方案進行「哪些牌較容易打出去？」和「哪些牌較難打出去？」這二個佈題活動，進一步將每一張牌可以跟牌的情形列出（即每個數的因數有哪些？），再以此引導學生質數與合數的概念。

(三)本研究將撲克牌遊戲改造為結構化的教具，在教學上能增強學生的「因數」與「因數配對」的概念。尋找適當的撲克牌遊戲予以轉化或利用其他文化活動來幫助學生獲得其他數學概念（例如，「排七接龍」撲克牌遊戲，其實也內含數序與分類的數學知識），是未來可以繼續探討的研究方向。

致謝：本研究是國科會專題計畫「九年一貫數學教學模組的開發與實踐（91-NSC-2521-S-415-002）」的研究成果，感謝國科會的經費補助。嘉義縣前南新國小陳福來校長對於本研究全力的支持，及合作夥伴吳佳玲老師用心的投入，使本研究得以順遂進行。又蒙審查委員細心的指正，使本文之品質得以提昇，在此一併致謝。

參考文獻

朱建正（1997）。國小數學課程的數學理論基礎。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（NSC-85-2513-S-002-001）。臺北市：國立臺灣大學數學系。

- 吳清山 (2002)。創意教學的重要理念與實施策略。《臺灣教育》，614，2-8。
- 林珮如 (2002)。國小學童因數解題與迷思概念之研究。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東縣。
- 陳清義 (1995)。國小五年級學童因數、倍數問題學習瓶頸之研究。臺北市立師範學院初等教育學系碩士論文，未出版，臺北市。
- 陳標松 (2003)。國小六年級數學學習困難學生因數倍數問題解題之研究。國立彰化師範大學特殊教育系碩士論文，未出版，彰化縣。
- 陳博文 (1996)。國小學童四則運算能力的研究。國立中正大學心理學研究所碩士論文，未出版，嘉義縣。
- 黃幸美 (2003)。兒童的問題解決思考研究。臺北市：心理。
- 黃國勳 (2003)。實踐小學高年級因數教學模組之研究。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。
- 黃國勳、劉祥通 (2003)。五年級學童學習因數教材困難之探討。《科學教育研究與發展季刊》，30，52-70。
- 甄曉蘭 (1995)。合作行動研究—進行教育研究的另一種方式。《嘉義師院學報》，9，297-318。
- 蔡文煥 (2000，12 月)。以日常生活活動為基礎促進兒童數學學習—以撲克牌為例。載於國立新竹師範學院舉辦之八十九學年度師範學院教育學術論文發表會論文集（頁 1245-1268），新竹市。
- 蔡文煥、林碧珍 (1998a，12 月)。數學、文化和認知整合教學研究（一）：兒童文化活動類型與結構。載於國立高雄師範大學舉辦之中華民國第十四屆科學教育學術研討會暨第十一屆科學教育學會年會短篇論文集編（頁 70-77），高雄市。
- 蔡文煥、林碧珍 (1998b，12 月)。數學、文化和認知整合教學研究（二）：兒童文化活動類型與結構。載於國立高雄師範大學舉辦之中華民國第十四屆科學教育學術研討會暨第十一屆科學教育學會短篇論文集編（頁 735-741），高雄市。
- 饒見維 (1996)。國小數學遊戲教學法。臺北市：五南。
- 蕭金土 (1995)。國小數學學習障礙學生的鑑定、學習問題診斷及學習策略教學效果之研究。國立政治大學教育研究所博士論文，未出版，臺北市。
- Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk and statistics*. New York: Springer-Verlag.
- Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational.
- Haigh, J. (1999). *Taking Chances: Winning with probability*. New York: Oxford University Press.
- Gray, E. M., & Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: The flexible meaning of

- symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
- Miles, T. R. (1992). The use of structured materials with older pupils. In T. R. Miles & E. Miles (Eds.), *Dyslexia and mathematics* (pp. 83-97). London: Routledge.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nesher, P. (1986). Are mathematical understanding and algorithmic performance related? *For the Learning of Mathematics*, 6, 2-9.
- Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York: Columbia University Press.
- Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Sobel, M. A., & Maletsky, E. M. (1988). *Teaching mathematics: A sourcebook of aids, activities, and strategies* (2nd ed). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

附錄一

爲了讓本研究教學方案透過實踐所修正的內容能清晰呈現，以下將各個初始教學方案和建議教學方案並列，同時顯現修正的內容（標楷體字部分）。

活動名稱：因數 K 吉棒		
教學目標	強化與檢驗學生的因數概念。	
活動說明	透過玩撲克牌（K 吉棒）的遊戲，讓學生做因數的計算練習，並深入發展。	
教學時間	教師視實際教學狀況彈性決定之。	
教學準備	一、教具或媒體：每組一副撲克牌。 二、教室佈置：二個人一隊（程度高配程度差的學生），四隊組成一組。	
方案修正情形		
方案類型	初始方案	建議方案
遊戲規則	(一)類似(K 吉棒)或(大老二)的玩法，以跟牌為主要規則。 (二)一副撲克牌分給四個人，每人分得 13 張，最先將牌出完為優勝者。 (三)由拿到黑桃 2 者先出牌（出什麼牌都可以），跟牌者的點數只要是第一出牌者點數的因數即可，不分牌的點數和花色大小，若無牌可出時，則輪空由下一人跟牌。 (四)當沒有人可以跟牌時，則由最後跟牌者取得新的出牌權。	(一)類似(K 吉棒)或(大老二)的玩法，以跟牌為主要規則。 (二)每兩人組一小隊，每組分四隊競賽。 (三)一副撲克牌分給四隊，每隊分得 13 張，最先將牌出完為優勝者。 (四)由拿到黑桃 2 者先出牌（出什麼牌都可以），跟牌者的點數只要是第一出牌者點數的因數即可，不分牌的點數和花色大小，若無牌可出時，則輪空由下一隊跟牌。 (五)當沒有人可以跟牌時，則由最後跟牌者取得新的出牌權。 (六)當有一隊將牌出完取得第一優勝後，其餘三隊仍然繼續玩，新的發牌權則由第一優勝者的下一隊取得。以此類推，直到四隊都分出勝負為止。 (七)每出完某一數的因數後，由組長將該數的因數的撲克牌整理成一疊，並於一局的比賽結束後，以展示各疊撲克牌的方式，詢問組員各數的因數。 (八)佈題： 1.哪一張牌最容易打出去？為什麼？ 2.哪些牌比較難打出去？為什麼？ 3.手中握有哪些牌比較可以穩操勝券？

活動名稱：因數對對碰		
教學目標	強化與檢驗因數配對概念，以完備因數概念。	
活動說明	透過玩撲克牌（撿紅點）的遊戲，讓學生做因數的「配對」練習，使其能簡化計算程序，窮盡所有的因數。	
教學時間	教師視實際教學狀況彈性決定之	
教學準備	教具或媒體：撲克牌一副，並修改撲克牌的數字：(A—1)，(2—2)，(3—3)，(4—4)，(5—5)，(6—6)，(7—18)，(8—8)，(9—9)，(10—24)，(J—36)，(Q—12)，(K—72)。	
方案修正情形		
方案類型	初始方案	建議方案
遊戲規則	修改自「撲克牌撿紅點」的玩法。 (一)每四人為一競賽單位。 (二)一副撲克牌分給四家，每家分得 6 張後，再現出 4 牌張作為「被吃牌」，其餘的牌置於中間當作「機會牌」，供放牌者掀開吃牌。由頭家開始放牌，每放一張牌可掀起「機會牌」一張，最後所有牌都放完，各自計算紅點的分數，吃最多分者為優勝者。 (三)原來「撿紅點」的遊戲規則主要是以「湊十配對」作為吃牌的條件。此活動遊戲規則改為「因數配對」的方式，若非指定數的因數時，則為「自己成對」。例如：指定以 72 的因數進行配對時，「1 配 72 (K 牌)」、「2 配 36 (J 牌)」、「3 配 24 (10 牌)」、「4 配 18 (7 牌)」、「6 配 12 (Q 牌)」、「8 配 9」、「5 配 5」。	修改自「撲克牌撿紅點」的玩法。 (一)每四人為一競賽單位。 (二)一副撲克牌分給四家，每家分得 6 張後，再現出 4 牌張作為「被吃牌」，其餘的牌置於中間當作「機會牌」，供放牌者掀開吃牌。由頭家開始放牌，每放一張牌可掀起「機會牌」一張，最後所有牌都放完，各自計算紅點的分數，吃最多分者為優勝者。 (三)原來「撿紅點」的遊戲規則主要是以「湊十配對」作為吃牌的條件。此活動遊戲規則改為「因數配對」的方式，若非指定數的因數時，則為「自己成對」。例如：指定以 72 的因數進行配對時，「1 配 72 (K 牌)」、「2 配 36 (J 牌)」、「3 配 24 (10 牌)」、「4 配 18 (7 牌)」、「6 配 12 (Q 牌)」、「8 配 9」、「5 配 5」。 (四)要吃牌時，必須先喊所出的牌乘以所要吃的牌等於 72，一方面確定學生是否真的瞭解，還是隨便打出去而已。另一方面也可強化「因數配對」的概念。
佈 題	你喜歡拿到哪些牌？為什麼？ 手中握有哪些牌比較可以穩操勝券？	