教育研究集刊
第五十四輯第一期　2008年3月　頁49-85

以 van Hiele 理論探討圖形樣式思考層次之研究

馬秀蘭

摘　要

本文旨在將 van Hiele 思考層次應用到數學的圖形樣式解題上。研究者修正了 Fuys、Geddes 與 Tischler（1988）針對 van Hiele 幾何層次所提出的部分行爲描述，建立國小高年級學童解決圖形樣式題之思考層次行爲，並依 21 個有關學生實際解決圖形樣式題表現之原案，嘗試擴展 van Hiele 理論之應用範疇至 van Hiele 圖形樣式思考層次。研究發現，高年級生對圖形樣式規律的思考層次行爲符合 van Hiele 之理論，學生圖形樣式之思考仍可分派至某一個層次；其中因思考深度不同，層次二及三再細分爲二 A、二 B 及三 A、三 B。學童之樣式思考層次亦具有次序性、內因性與外因性，以及語言性之特性。學生若能用幾何圖形結構之間的關係來辨認樣式，則有助於圖形樣式思考層次的提升及代數知識的建造。此探索性研究之結果將提供給未來有嚴謹設計之後續研究者進行大樣本之檢測。

關鍵詞：van Hiele、思考層次、圖形樣式

馬秀蘭，嶺東科技大學企業管理系副教授
電子郵件為：hlma@mail.ltu.edu.tw
投稿日期：2007年4月25日；修正日期：2007年10月13日；採用日期：2008年1月3日

Bulletin of Educational Research
March, 2008, Vol. 54 No. 1 pp. 49-85

A Study of the Thinking Levels of Pictorial Patterns from the Viewpoint of van Hiele's Theory

Hsiu-Lan Ma

Abstract

The purpose of this paper is to discuss the application of van Hiele's thinking levels to problem-solving of pictorial patterns. The researcher modified some of the van Hiele level descriptors described by Fuys, Geddes, & Tischler (1988) and established the van Hiele level descriptors regarding 21 upper graders solving pictorial-pattern problems.

The conclusions drawn from this study are as follows. (1) The students' thinking on pictorial patterns fitted in with van Hiele's theorem and could be classified into certain levels. (2) According to the different thinking degrees of the students, level 2 and 3 were divided into 2A, 2B and 3A, 3B, respectively. (3) Four properties were shown in the thinking levels: sequential, intrinsic and/or extrinsic, and linguistic. (4) If students could use the relations between the structures of figures to identify patterns, they were able to advance their thinking levels of pictorial patterns and to construct algebraic knowledge. It is hoped that the results of this explorary research will contribute to a more rigid study design with a larger sample in the future.

Keywords: van Hiele, thinking levels, pictorial patterns

Hsiu-Lan Ma, Associate Professor, Department of Business Administration, Ling Tung University
E-mail: hlma@mail.ltu.edu.tw
Manuscript received: Apr. 25, 2007; Modified: Oct. 13, 2007; Accepted: Jan. 3, 2008

壹丶緒　論

數學是被描述爲樣式（pattern）及次序的科學（National Research Council, 1989），或被認爲是樣式及關係（relationships）的搜尋（Biggs & Shaw, 1985）。L. A. Steen 甚至指出，數學已從一門研究數、量、形的學問轉變成爲一門「樣式的科學」，數學家從數字中、空間中、科學中、電腦中，甚至從想像中尋找樣式（引自 Zimmermann & Cunningham, 1991）。由於樣式活動爲數學進階的過程，也是介紹函數概念和變數的好方法，同時也可做爲提供重要數學概念之有意義的經驗，因此樣式活動對國小學生奠定「代數」基礎，扮演一個重要角色（Herbert & Brown, 1997; Naylor, 2002）。一般人認爲圖形任務比純符號任務有較多基本的元素存在，以及圖形可以展現較多實際的維度；除此之外，一些比較趨近以幾何思考的人認爲，以圖形內容呈現之樣式會讓任務生動或簡化（Orten, Orten, & Roper, 1999）。因此圖形樣式活動是連結早期代數想法到具體脈絡的一個有效方法，對學生之後的學習能提供一個有用、具體的基礎（English & Warren, 1999）。因此，探討國小學童對圖形樣式解題過程所引發的代數六思維，以了解學生樣式規律的思考層次自有其價值。

Van Hiele 的理論享譽國際，早在 1960 年代蘇俄的教育學家就有興趣於 van Hiele 模式，並且基於此模式執行了一個廣大的研究，其終極目的在於改進他們學校的幾何課程（Fuys, Geddes, & Tischler, 1988）。Van Hiele（1986）的五個幾何思考發展層次爲視覺的（visual）、描述的（descriptive）、理論的（theoretical）、形式邏輯的（formal logic）和邏輯法則本質的（the nature of logical laws）。此五個層次被描述之方式有兩種，層次一到層次五（吳德邦，1999；Usiskin, 1982; van Hiele, 1986）或層次〇到層次四（盧銘法，1999；Fuys et al., 1988; Golinskaia, 1997），本文將採用一到五方式。國內外 van Hiele 理論大多被引導到有關幾何學之研究上，例如：平面幾何圖形概念之 van Hiele 思考層次調查及／或診斷教學之研究（吳德邦、馬秀蘭、藍同利，2006；謝貞秀、張英傑，2003；Clements, Swaminthan, Hannibal, & Sarama, 1999; Wu & Ma, 2006）；幾何理解和證明能力（Lee, 1999）、

空間能力（左臺益、梁勇能，2001）或立體幾何（洪萬生，2003；吳德邦，2004）與 van Hiele 思考層次之研究；或透過 van Hiele 模式去幫助學生對圓周、面積（Malloy, 1999）或全等圖形（Jamime & Gutierrez, 1995）等了解之研究，因此，van Hiele 理論在幾何課程中占有一席之地。

其實 van Hiele（Fuys et al., 1988）本人曾指出，可將其定理進一步觀察和應用在數學及其它學科上。但卻僅有少數研究做此嘗試，其中仍與幾何有關的如國外的 De Block-Docq（1994）探討 12 歲學童解多邊形瓷磚問題之思考，結果發現，瞬間的思考產生簡易結構觀念，推理而非直覺的思考則出現在繪圖活動和證明之論點中。至於 Land（1991）則將 van Hiele 理論應用在大專生函數的學習上，藉描述學生對代數認知的過程，調查 van Hiele 模式在代數教學之適當性。然而，國內卻沒有人將 van Hiele 的理論做其他應用，因此本研究試圖將 van Hiele 思考層次應用到數學的「圖形樣式解題」上，欲藉此來探討學生對樣式規律的思考層次。

國內相關 van Hiele 之研究皆顯示國小學童之幾何思考大多介於層次一至三之間（吳德邦，1999；林軍治，1992；劉好，1993；Wu & Ma, 2006）。大部分中、高年級生對基本幾何圖形概念能達層次二，但只有高年級生能達層次三，少數思考有跳躍現象（Wu & Ma, 2006）。四、六年級生對四邊形概念最多在層次二，層次一次之，層次三最少（盧銘法，1999）。而 Crowley（1987）提出 van Hiele 幾何思考層次有次序性（sequential）、提升性（advancement）、內因性與外因性（intrinsic and extrinsic）、語言性（linguistics）及不配合性（mismatch）之特性。因此，研究者為了解國小高年級學童對圖形樣式規律的思考層次之行為，乃試圖依據 Fuys 等人（1988）對 van Hiele 幾何思考層次的行為描述，並參考吳德邦、李懿芳與馬秀蘭（2006）及 Wu、Ma、Hsieh 與 Li（2007）之立體幾何思考層次之研究，以及學童解決圖形樣式問題之表現，將幾何思考層次一、二、三之部分行為描述，修正成 van Hiele 圖形樣式思考層次之行為描述。此探索式研究之結果將提供給未來有嚴謹設計之後續研究者進行大樣本之檢測。

然而，高年級學童對具有幾何圖形內涵的樣式思考是否如其幾何思考一樣仍可分派至某一個層次？圖形樣式思考層次是否仍然保有上述 Crowley（1987）提出之層次特性？學童對圖形樣式所表現之不同解題方式是否會影響其樣式思考層

次的思考水平及代數知識的建造？因此本研究目的如下：

一、探討國小高年級學童解決圖形樣式題之 van Hiele 思考層次；

二、發展 van Hiele 圖形樣式思考層次；

三、探討 van Hiele 圖形樣式思考層次的特性；

四、探討解題方式對 van Hiele 圖形樣式思考層次及代數知識建造的影響。

貳、文獻探討

一、van Hiele 幾何思考層次與層次特性

國內相關 van Hiele 之研究皆顯示國小學童之幾何思考大多介於層次一至三之間，茲將此三個層次分述如下：

（一）層次一：這個階段的兒童藉著視覺觀察各種具體事物，從各種實體物的外形輪廓來辨認形體。例如，由生活經驗中知道像門的形狀爲長方形。兒童雖知各種圖形，但卻無法了解這些圖形的真實意義，他們可以使用非數學的術語。

（二）層次二：這個階段的兒童已經具有辨別圖形特徵的能力，能利用視覺來觀察組成圖形的基本要素與這些圖形之間的關係，分析幾何概念。因此，能夠察覺到長方形有兩個長邊和兩個短邊，而且對邊相等。兒童藉由組成元素的名稱與組成元素之間的關係來分析圖形；同時，依其經驗建立同一類圖形所具之特性，並且運用圖形之特性來解題。

（三）層次三：這個層次的兒童已經能夠了解構成各種圖形的要素，並且能夠進一步探求各種幾何圖形的內在屬性，以及各個圖形之間的包含關係。例如：平行四邊形的兩雙對邊相等，當平行四邊形其中一角爲 90°時，這個四邊形就是長方形。兒童開始建構不同類型圖形之間的關係，如正方形、菱形、長方形、平行四邊形。學生使用公式表示和使用定義，整理先前發現的性質，給一非正式的討論，並跟著給一演繹上的討論。

Crowley（1987）針對 van Hiele 幾何思考層次提出次序性、內因性與外因性、語言性、提升性及不配合性之特性。提升性及不配合性與教學有關，其非本文探討之範疇，故不予討論。茲將此前三個特性分述如下：

（一）次序性：學童之幾何思考層次是循序漸進的，後一個層次的概念是來自於前一個層次的概念。例如，層次二的兒童知道長方形有兩個長邊和兩個短邊，此概念源自他們在層次一階段的長方形是瘦瘦長長的概念。

（二）內因性與外因性：在某一幾何思考層次的性質是屬於內在的性質，到了下一個層次，此一性質就有可能成爲外顯的性質。例如，長方形的「長和寬」在層次一可能不明顯，它是屬於層次二長方形的內在性質，但「長和寬」到了層次二就成爲長方形的外顯性質；層次一的兒童辨識「瘦瘦長長」是層次一的長方形的內在性質。

（三）語言性：每一層次都有屬於自己層次獨特的語言，這些語言必須經過修正，才能符合下一層次的語言特性。例如，層次一的兒童使用「長方形是瘦瘦長長的」語言，其必須經過修正，才能符合層次二的「長方形是由長和寬組成」的語言。

二、圖形樣式解題與 van Hiele 幾何思考層次

Fuys 等人（1988）針對 van Hiele 幾何思考指出，在「視覺的層次一」學生能根據圖形的外貌來辨認並操弄圖形和其它幾何圖形的基本物件（如邊、角）；在「描述的層次二」學生能以圖形結構和結構及性質之間的關係去分析圖形，並用性質去解決問題；在「理論的層次三」學生能有系統地說明並使用定義、對於先前發現的性質給予非形式化的論點，以及給予推論的觀點。Fuys 等人進一步針對層次一、二、三的各提出 7、10、7 個行爲描述（descriptors）與學生反映的例子，其中有的再細分爲 a、b、c 等。此將以 L2-3a 表示層次二（L2）的第 3a 個（3a）描述，其他以此類推。由於本文試圖以 Fuys 等人描述的行爲及例子爲基礎，將 van Hiele 思考層次應用到「圖形樣式解題」上，因而將陳述學生在解決圖形樣式題過程中與 Fuys 等人所描述行爲（如 L2-3a）之相關性。

一般解題者將圖形樣式題轉換成數列模式的方法有三種（Orten et al., 1999）：

法 1：計算作業中呈現的每一個形狀的點，立即轉換形狀爲數列；

法 2：審視每一個新形狀需要多少更多的點，依此做爲數列中連續項的差距；

法 3：觀察圖形外形，在心中或用畫的方式來延續該序列。

由此可知在解圖形樣式題之初會牽涉到「觀看」（seeing）圖形，「觀看」總是學習者的第一步，它涉及到心理捕捉的樣式或關係（Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 1985），「觀看」是數學了解之基本（Penrose, 1991）。

研究者認爲上述 Orten 等人（1999）描述之「法 1」立即轉換圖形爲數列，是不考慮圖形外貌，它與 L1-7b（辨識圖形的某一部分，而不思考圖形的特徵屬性）相關。「法 2」看到圖形整體的存在，但是不考慮圖形的結構，它與 L1-5（把圖形的外貌視爲整體來描述）相關。「法 3」觀察圖形外形，是考慮到圖形的結構，它與 L1-1（把圖形外貌視爲整體來辨識，但卻從……來看）或 L1-6（具體地操弄圖形）相關；而在描述圖形中可能會涉及到 L1-3（使用（非）標準的形式給圖形做合適的命名）。因此研究者將此 5 個有關 L1 之行爲描述，分別修正如下，其中【】內之文字表示某行爲之簡述，以方便第肆章節原案分析之用：

L1-1：將圖形外貌視爲整體來辨識，但卻以組合方式來看【以組合整體辨識圖形】。例如：將 T 圖看成上排及下排，如圖 1 中之（L1-1）所示。

L1-3：使用（非）標準的形式給圖形（基本物件）做相關的命名或標示【給圖形物件做相關命名】。例如：將長方形兩邊命名爲「高和長」，如圖 1 中之（L1-3）所示。

L1-5：將圖形的外貌視爲整體來描述【以整體辨識圖形】。例如：L 形，如圖 1 中之（L1-5）所示。

L1-6：具體地操弄或繪製圖形【繪製圖形】，如圖 1 中之（L1-6）所示。

L1-7：立即以計數法辨識樣式，而不思考圖形特徵屬性【以計數法辨識樣式】。例如：立即將 3 個圖形計數，轉換爲 4 個、10 個、18 個。

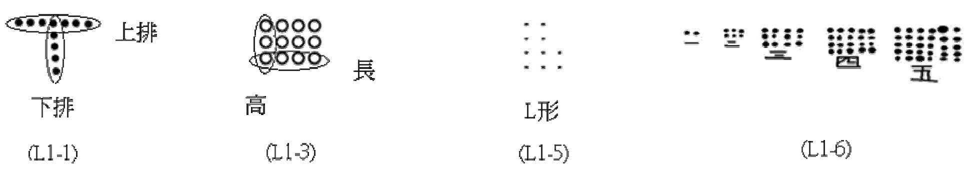


圖 1　L1 行為描述例子圖示

學生在進一步解決樣式題之過程會涉及三階段（Herbert & Brown, 1997）：

（一）尋求樣式：是由一情境中提取相關資訊；

（二）確認樣式：將所提取的資訊以數學文字、圖表或方程式等表示，並運用數學分析，形成數學發現；

（三）一般化：將數學發現說明與應用到相同或新的、相關的情境中。

研究者認為（一）「尋求樣式」與 L2-1（辨認和測試每個圖形結構之間的關係，如辨認一個圖形有四個直角和四個等邊）或 L2-3a（根據圖形之間結構的關係來比較兩個圖形）相關；（二）「確認樣式」與 L2-4a（解釋和描述圖形性質並以此來描繪圖形）、L2-10（有系統地說明和使用圖形一般化的性質及使用相關的語言）、L3-1c（用公式表示和使用定義把圖形分類）或 L3-2（給予非正式的論點，如使用圖片或者其他材料）相關；（三）「一般化」與 L3-3b（給予一個推論論點總結或改變）或 L3-7（認識到推論的角色和以推論的模式來處理問題）相關。因此研究者將此 4 個有關 L2 及 4 個有關 L3 之行為描述，分別修正如下：

L2-1：辨認和測試樣式中每項結構間的關係【定義每項結構間的關係】。例如，1×（1＋1）、2×（2＋1），如圖 2 中之（L2-1）所示。

L2-3：以樣式結構的關係來比較樣式中連續項的差異【比較連續項差異】。例如，橫的每次加 2，直得每次加 1，如圖 2 中之（L2-3）所示。

L2-4：描述樣式圖形性質及描繪圖形【以樣式性質來描繪圖形】。如圖 2 中之（L2-4）所示。

L2-10：以未歸納之數學式或文字描述表示樣式結構，例如，5＋3＋3＋3＋3，未歸納成 5＋3×4。

L3-1：以公式或定義分類樣式。如，圖 n 是：n×（n＋1）。

L3-3：將推論一般化或改變。例如，n＋n＋（n＋2）＝3n＋2。

L3-2：對先前發現之性質給予非正式的論點【使用逐一列舉法】。例如，圖 100 是 2＋4＋6＋…＋（200）。

L3-7：以推論模式處理遠處問題（但尚未建立定理相互之關係）【處理遠處問題】。如第 100 個：101×102－2。

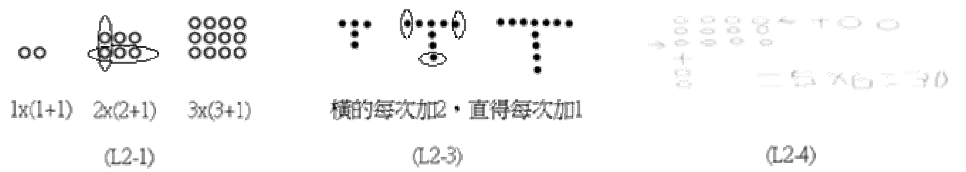


圖 2　L2 行為描述例子圖示

因此本文以 Fuys 等人（1988）所提出針對 van Hiele 層次的描述和例子爲基礎，將 van Hiele 幾何思考層次一、二、三之部分行爲描述，修正成「van Hiele 圖形樣式思考層次」之行爲描述，其中層次一、二、三各有 5 個、4 個、4 個描述。

三、van Hiele 理論與 van Hiele 圖形樣式思考層次行為

以下將描述 van Hiele（1986）前三個幾何層次的內容，並指出其與研究者修訂之 van Hiele 圖形樣式思考層次行爲的相關：

（一）視覺的層次：學生主要是藉著視覺觀察物體的輪廓來辨認圖形（L1-1：以組合整體辨識圖形，或 L1-5：以整體辨識圖形）；學生能以一般物件的描述辨識形狀，例如矩形看起來像門（L1-3：給圖形物件做相關命名），但未注意到圖形的構成（L1-7：以計數法辨識樣式）；學生也能操弄圖形的基本物件（L1-6：具體地操弄或繪製圖形），但是無法了解這些圖形的真正定義。

（二）描述的層次：學生能用標準的語言描述圖形的特徵（L2-4：描述樣式圖形性質及描繪圖形），也能注意到組成圖形的元素（L2-1：辨認每項結構間的關係）及圖形之間的關係（L2-3：比較連續項差異）。學生能組織幾何圖形，但尚未能做演繹推理，例如知道正方形有四個直角，但因無法歸納類別，故不認爲正方形也是長方形（L2-10：以未歸納之數學式或文字表示樣式結構）。

（三）理論的層次：學生除了清楚各種圖形的結構，並知各種圖形的內在屬性，如正方形四角相等且四邊相等，以及各種圖形之間的包含關係，如正方形是長方形的一種，此與以公式或定義分類樣式（L3-1）相關。學生也能夠依圖形的性質進行非正式的推演，但尚未能進行有系統的證明（L3-2：使用逐一列舉法，

L3-7：處理遠處問題）。學生會由某幾何屬性推演出其他屬性（L3-3：將推論一般化或改變）。

參、研究方法

一、研究對象

本研究樣本是 40 位國小高年級學生，其中 28 位來自南投縣某國小六年級一班全體學生（五年級亦同班），12 位來自台中市某國小五年級兩班的部分學生（12 位四年級同一班）。他們接受八十二年版數學新課程（教育部，1993），該階段尚未觸及代數式之課程。因自三年級起就有電腦課，因此他們都具有一般電腦文書處理及上網的基本技能。為了讓樣本在網路上匿名發表，且可讓研究群辨識其身份，故每位樣本都有一代號，其中小六生之代號為三碼，小五生為四碼。小六生編碼方式如下，先將學生分為男（b）、女（g）二類；其次將各類分為高（h）、中（m）、低（l）人數相同（或差不多）的三組，其是以學生前一個學年在全班數學之總成績做排序，再依分數高低，各取三分之一而來；共得六組；再以學生在六組中之成績排名決定編號（1, 2, 3, …）。例如 gh1 表六年級女生（g）高程度（h）第一位（1）。至於小五生亦採用上述分類法，只是研究群最後再從六組中隨機抽取 2 名學生；三碼代號前再加上「M」，以與小六生做區別，例如 Mbl2 表五年級（M）男生（b）低程度（l）第二位（2）。六年級男生以及女生之高、中、低三組各有 5、6、5 人及 4、4、4 人。五年級男生以及女生之高、中、低三組，則都各有 2、2、2 人。同一學生在不同概念之 van Hiele 幾何思考層次可能不同（Mayberry, 1983），更何況是不同程度學生之 van Hiele 幾何思考層次；故不同程度學生之圖形樣式思考層次亦可能不同。但本文限於研究目的與篇幅之故，有關不同程度學生的表現，將另闢文討論之。

二、研究管道與素材

（一）研究管道

本研究以易學易用的網路討論板爲管道，進行黃敏晃（1996）所謂之教師布題、學生解題、發表與討論之活動。該系統屬會員制，使用者必須以自己的帳號和密碼登入，他們可以在該討論板上以文字或圖表方式張貼資料，系統會記錄個人發表文章的內容、日期、時間及總篇數等。至於將數學活動移植到網路上進行，除了上網的樂趣及網路討論板的效益外，也使用來談天說地的系統，具有教育上的意義（馬秀蘭，2004；Ma, 2005; Ma & Wu, 2006）。

（二）研究素材

本研究學生解題的素材是 8 個樣式問題，其中奇數題爲圖形題，偶數題爲數字題；它們是研究群參考下列相關文獻所編製，如成就評比單位（Assessment of Performance Unit, APU）（n.d.）、Orten 與 Orten（1999）及 Hargreaves、Threlfall、Frobisher 與 Shorrocks-Taylor（1999）的數字樣式，以及 Orten、Otren 與 Roper 等人（1999）的圖形樣式等。樣式涉及到逐步的發展，技術上稱爲序列（sequence）。「線性序列」（linear sequence）是指連續項的差是常數之序列，例如：5, 8, 11, 14,……是線性序列，因其連續項的差（即 8－5＝11－8＝14－11＝3）是常數 3。「二階序列」（quadratic sequences）是指連續項的差所構成之序列的差是常數之序列，例如：2, 6, 12, 20,……是二階序列，因其連續項的差（即 6－2＝4、12－6＝6、20－12＝8）所構成之序列爲 4, 6, 8,……，其次 4, 6, 8,……連續項的差（即 6－4＝8－6＝2）是常數 2。

八個問題中除了第二題爲等比數列（4, 12, 36, 108,……）、第四題爲費伯那齊（Fibonacci）數列（1, 1, 2, 4, 8,……），以及第五題爲線性序列之外，其他五個問題皆爲二階序列。研究者將以第一、第五和第七題三個圖形題去探究本文目的。此三題是以「點」方式呈現，其中第五題（如圖 3 所示）爲線性序列，第一及第七題爲二階序列（各如圖 4、圖 5 所示），學生被要求去預測序列的下一項及第 5、第 10（或第 20）和第 100 項，甚至第 n 項之點個數。

三、研究過程與資料處理

（一）研究過程

爲了了解學生解決樣式之過程，本研究利用約一學期時間，大約兩週至三週一次，依照題目順序逐次在網路上布題。學生被告知以自己的想法來解題，他們解題的表現與其學業成績完全無關，自己想的策略是最好的。學生利用在校的午休或放學後課餘時間到他們的電腦教室解題。學生在網路討論板張貼其解題想法之餘，老師會對學生在網路討論板張貼之解題想法做檢查；一些解法表達不清或相較於其程度表現卻特優的學生都會被老師要求去進行一對一晤談，以確定其解題方式與過程。例如，Mgm1 在第五題發表想法如「第一個圖加 6 個圓圈，再減 1 個圓圈，第二個圖加 8 個圓圈，再減 1 個圓圈……」，她的老師在一對一晤談下，會問她爲什麼每次都「再減 1 個圓圈」，Mgm1 就須解釋她的想法，如「其中有 1 個是重複的，所以要減掉」。所以，共有兩種形式的資料以了解學生對問題的想法，一爲學生張貼在網路之解法，另一爲與學生一對一之晤談。

（二）資料處理

質的研究之資料分析特徵，在於研究過程中不斷蒐集資料、進行分析，形成初步的結論，再繼續蒐集資料、進行分析，形成進一步結論的過程（Guba & Lincoln, 1989; Miles & Huberman, 1994）。研究者也採取這種策略，透過持續比較（constant comparison）與三角交叉（triangulation）等方式來分析資料。本研究中使用之持續比較是將學生解樣式題的方式或想法與剛形成的暫時性假設做持續的對照，以確定假設的合理性。

例如，在第一題中達圖形樣式思考層次二的學生，有的會比較連續項差異（L2-3），如「依序是以 4, 6, 8, 10, ……的加法」（原案 1.2），但有的學生除了有 L2-3 行爲外，尙能辨認每項結構間的關係（L2-1），如「2，3＋3，4＋4＋4，……」，但卻未將其做歸納（L2-10）。研究者認爲後者之數學式是易於被引導去意識到圖形位置和個數間的關係，如「圖一：2，圖二：3×2，圖三：4×3……」，甚至發展出「圖 100：101×100，或圖 n：（n＋1）×n」之「函數概念」；因此研究者將圖形樣式思考層次二再細分爲二 A 及二 B，其中層次二 A 者有 L2-3 行爲，層次

二 B 者有 L2-3 行為外，尚有 L2-1，甚至 L2-10 行為。之後在學生繼續進行的解題活動中，研究者會注意是否仍有上述情況發生，藉此與形成的暫時性假設（層次二 A 及二 B）做前後的觀察比對，以確定該假設的合理性。結果發現該假設是合理的，如在第五題中又有學童出現層次二 B 的行為，如「5，5＋3，5＋3＋3，5＋3＋3＋3，……」數學式，或「第 5 個橫……3 加 2 加 2 加 2 加 2，直……2 加 1 加 1 加 1 加 1」文字描述；於是研究者追加「文字描述」於 L2-10 行為中，即「以未歸納之數學式或文字描述表示樣式結構」。因此，研究者會將之後所得的資料不斷地與前次分析所得的資料相互比較，以建立合適的主張，企盼能對於學生在解決圖形樣式題思考層次的相關面貌，賦予更清楚之詮釋。

在三角交叉法的運用上，本研究是以老師與學生在網路討論板上發表的內容及訪談紀錄做為資料蒐集的主要來源。為使本文具有信度，學童解題時所涉及之思考行為分類，是採用「交互觀察者一致」（interobserver agreement）（王文科，2001）；其是透過兩位數學教育家（本文研究者 P1 與另一位大學副教授 P2）對原案之觀察以決定結果，期從不同分析者觀點的交叉比對，以克服研究者主觀之見解。本研究是以每件原案為單位去求得分類結果的一致性，而每件原案是以研究者欲分析之發表內容為主；依研究者修正的圖形樣式思考層次之行為描述，每件有 3 個層次，層次一、二、三又各有 5、4、4 個描述，因此共有 13 個事件。例如原案 1.4 之 Mgl2 之交互觀察者信度為 92%（12/13），如表 1 所示，當 P1 與 P2 之看法不同時，二者重新審察，進一步溝通、協商，以達成看法的一致。

表1　交互觀察者一致表

層次	原案1.4 （Mgl2）				
一	L1-1（○）	L1-3（×）	L1-5（×）	L1-6（×）	L1-7（×）
二	L2-1（○）	L2-3（○）	L2-4（×）	L2-10（？○）	
三	L3-1（×）	L3-2（×）	L3-3（×）	L3-7（×）	

註：（○）、（×）各表示行為之有、無。其中L2-10（？○）之「？」表示交互觀察者看法不一致，一認為有，另一認為無，「○」表示協商後一致認為有。

每個原案中之資料主要是學生張貼在網路之解法，晤談資料只做分析時之輔助之用，僅需要時才擇要置於原案中。網路解法之編碼採用以學生網路上代號為主軸之系統編碼，編碼前半段為學生代號（小六生三碼，如 bm1；小五生四碼，如 Mgh2），後半段第一碼為研究素材之問題題號，最後兩碼為發表之流水號，其是以學生在網路討論板上發表之時間為依據；例如 Mgh2-501 表示小五生 Mgh2 在第五題（5）的第一個發表（01）。但若有些發表需要再細分成「事件」處理，則在編碼之後再加上 a, b, c,……以茲區別；例如 Mgh2-501a，Mgh2-501b 各表示上述發表之第一個（a）、第二個（b）事件。而 Mgh2-501a：（11-07-2001）則進一步表示 Mgh2 在 2001 年 11 月 7 日在網路上發表 501a 內容。至於訪談紀錄之編碼與原案編碼相同，僅將學生代號後之「-」改成「~」；例如 Mgm1~506 S、Mgm1~507 T 各表示小五生 Mgm1 在第五題（5）訪談紀錄中師生對話的第六（06）、第七（07）個，而 S、T 則各指學生、老師的發表。

肆、結果與討論

以下將以第一、第五與第七題為例，依序呈現 7、8 與 6 件學生解題的代表性原案，再以研究者修正的 van Hiele 圖形樣式思考層次之行為描述為依據，探究本文三個目的。

一、學童解決圖形樣式題時之 van Hiele 思考層次

（一）第一題之原案與分析

圖 3 第一題

【原案 1.1】

bm1-101a：（09-10-2001）因爲題目上是 2 個圈圈、6 個圈圈、12 個圈圈，

bm1-101b：我的想法是先乘 3 再乘 2，由此類推 2 乘 3 等於 6、6 乘 2 等於 12、12 乘 3 等於 36、36 乘 2 等於 72、72 乘 3 等於 216，所以第 5 個圈圈是 216 個……。

小結：由 bm1-101a 之「2、6、12」知 bm1 以計數法辨識樣式（L1-7）；由 bm1-101b 之「先乘 3 再乘 2」知 bm1 能比較連續項差異（L2-3），但因 bm1 一開始就忽略圖形的特徵，因而產生不同的樣式；bm1 沒有進一步做推論。

【原案 1.2】

gh1-101：（09-05-2001）2 個圈圈加 4 個圈圈就等於 6，6 個圈圈加 6 等於 12，依序就是 4、6、8、10，20 加 10 個圈圈就等於 30。

gh1-102a：（09-12-2001）第一圖到第二圖是加 4，第二圖到第三圖是加 6，……以這種算法到 100 圖之間，是以 4、6、8、10、12、14、16、18、20、22……的加法。

gh1-102b：到 99 圖時已經是 900 個了，再照算法要加 200 個，就等於 1100 個。

小結：由 gh1-101 之「2、6、12」知 gh1 以計數法辨識樣式（L1-7）；由 gh1-101 及 gh1-102a 之「加 4、6、8、10……」知 gh1 能比較連續項差異（L2-3）；由 gh1-102b 知 gh1 無法做推論。

【原案 1.3】

bl1-101：（09-10-2001）……因爲圖 5 是 4 加圖 1 的 2 等於 6，長的比短的多 1，所以短的 5，6 乘 5 等於 30，答：30 個。

小結：由 bl1-101 之「長的、短的」知 bl1 以組合整體去辨識圖形（L1-1）；再由「圖 5 是 4 加圖 1……」知 bl1 能比較連續項差異（L2-3）是依序加 1，故圖 1 到圖 5 是連續加 4 次 1。再由「6，長比短的多 1，……短的 5」知 bl1 能辨認每項結構間的關係（L2-1）；bl1 未做進一步推論。

【原案 1.4】

Mgl2-101：（10-25-2001）2，3＋3，4＋4＋4，5＋5＋5＋5，6＋6＋6＋6＋6

圖 5 是 30 個。

Mgl2-102：（10-25-2001）因從圖 99 到圖 100 它要加一個點，它是 101 個點。

訪談紀錄

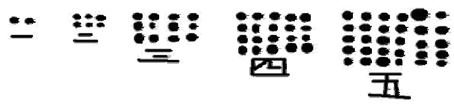
Mgl2~101 T：101 個點是指什麼？

Mgl2~102 S：圖 1 有一層，一層有 2 個點，圖 2 有二層，一層有 3 個點，圖 3 有三層，一層有 4 個點，所以圖 100 有 101 個點。

小結：由 Mgl2-101 之「2，3＋3，4＋4＋4……」及 Mgl2~102（訪談）之「一層、二層、三層……」知 Mgl2 以組合整體去辨識圖形（L1-1）。由 Mgl2-101 之「2，3＋3，4＋4＋4……」、Mgl2-102 之「加一個點」及 Mgl2~102 之「圖 1 一層（2 個點），圖 2 二層（3 個點），……」知 Mgl2 能比較連續項差異（L2-3）為多一層且每層多一點；同時由「2，3＋3，4＋4＋4……」知 Mgl2 能辨認每項結構間的關係（L2-1），但 Mgl2 未將其歸納如「2，3×2，4×3……」，有未歸納數學式表示樣式結構（L2-10）行為。Mgl2 未做進一步推論。

【原案 1.5】

gh2-101：（09-10-2001）上傳了這個圖片：



gh2-102：（09-13-2001）……因為圖一是 2 乘於 1 等於 2，圖二是 3 乘於 2 等於 6，圖三是 4 乘於 3 等於 12，……以此類推。所以，到圖一○○是 101 乘於 100 等於 10100 個圓圈圈。

小結：由 gh2-101 之圖形知 gh2 能繪製圖形（L1-6），且由其正確性知 gh2 能以樣式性質來描繪圖形（L2-4），能比較連續項差異（L2-3）為多一層且每層多一點，以及辨認每項結構間的關係（L2-1）。由 gh2-102 之「圖一是 2 乘於 1，……圖一○○是 101 乘於 100」知 gh2 能以公式或定義分類樣式（L3-1）及處理遠處問題（L3-7）。

【原案 1.6】

Mgh1-101a：（10-23-2001）圖一是 2，圖二是 6，圖三是 12。它們是加 4，加

6，圖四是加 8，圖五是加 10。

Mgh1-101b：圖一是 2，圖二是 2＋（4），圖三是 2＋4＋（6），圖四是 2＋4＋6＋（8），圖五是 2＋4＋6＋8＋（10）。

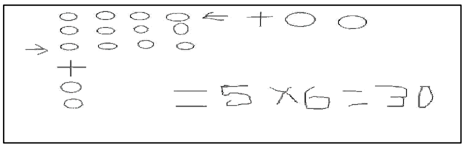
Mgh1-102：（10-25-2001）圖一○○是 2＋4＋6＋……＋（200），一直加。

小結：由 Mgh1-101a 之「2，6，12」知 Mgh1 以計數法辨識樣式（L1-7），再由「加 4，加 6，加 8……」知 Mgh1 能比較連續項差異（L2-3）。由 Mgh1-101b 之「2，2＋（4），2＋4＋（6），……」知 Mgh1 能辨認每項結構間的關係（L2-1）爲連續偶數相加，並以未歸納之數學式表示樣式結構（L2-10）。由 Mgh1-102a 之「圖一○○是 2＋4＋……＋（200）」知她使用逐一列舉法（L3-2）及以公式或定義分類樣式（L3-1）。但因她未做歸納，故至此而已。

【原案 1.7】

bh2-101：（09-07-2001）把圖三看成長方形，在左邊那 3 個圈就是高，在下面那 4 個圈就是長，所以 3 加 2 等於 5，4 加 2 等於 6，5 乘 6 等於 30。

bh2-102：（09-10-2001）



bh2-103：（10-17-2001）圖一是 1×（1＋1），圖二是 2×（2＋1），……圖五是 5×（5＋1），5＋1＝6，5×6＝30，A：30 個，到圖一○○時是 100×101＝10100，A：10100 個，圖 n 就是：n×（n＋1）的答案。

小結：由 bh2-101 之「看成長方形」知 bh2 以整體辨識圖形（L1-5），而由「高、長」知他給圖形物件做相關命名（L1-3），再由「3 加 2，4 加 2」知他能比較連續項差異（L2-3），即每圖依序加 1。由 bh2-102 之正確圖形知 bh2 能以樣式性質來描繪圖形（L2-4），由 bh2-103 之「1×（1＋1），2×（2＋1）……」知他能辨認每項結構間的關係（L2-1），由「n×（n＋1）」知 bh2 能以公式或定義分類樣式（L3-1），由「圖一○○……100×101」知 bh2 能處理遠處問題（L3-7）。

（二）第五題之原案與分析

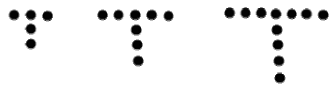


圖 4 第五題

【原案 5.1】

Mgm1-501a：（11-29-2001）第一個圖加 6 個圓圈，再減 1 個圓圈，第二個圖加 8 個圓圈，再減 1 個圓圈，第三……到第一百個圖，答案就出來了。

Mgm1-501b：第 n 個就×n。

<u>訪談紀錄</u>

Mgm1-506 S：……T 是由兩條等長直線組成，每一條直線上有 3 個黑點，兩條就有 6 個黑點，但其中有一個是重複的，所以要減掉。

Mgm1-507 T：那第二個圖呢？

Mgm1-508 S：因爲直的這一條有 4 個黑點，4 乘以 2 等於 8，再減 1 個圓圈。

小結：由 Mgm1-506 之「兩條直線」知 Mgm1 以組合整體去辨識圖形（L1-1）。由 Mgm1-501a 之「6、8、10 個」、Mgm1-506 之「3 個黑點，兩條就有 6 個黑點」以及 Mgm1-508 之「4 個黑點，4 乘以 2」知 Mgm1 誤將所有 T 形視爲由兩條等長線組成，因而解題失敗。再由 Mgm1-501b 之「×n」不正確的推論，知 Mgm1 缺乏代數中變數之概念。

【原案 5.2】

Mbl2-501a：（12-10-2001）5 個，8 個，11 個。

Mbl2-501b：5＋3＝8，8＋3＝11，11＋3＝14，14＋3＝17，17＋3＝20，所以第五個有 20 個黑點組成 T。

Mbl2-501c：20×3＝60，20＋60＝80，所以第二十個圖有 80 個黑點組成 T。

訪談紀錄

Mbl2-502 T：有沒有其他方法去求第二十個圖的黑點數？

Mbl2-502 S：就是 20×3＝60，20＋60＝80 的方法啊！

小結：由 Mbl2-501a 之「5，8，11」知 Mbl2 以計數法辨識樣式（L1-7）；由 Mbl2-501b 之「＋3」知 Mbl2 能比較連續項差異（L2-3）；由 Mbl2-501c 及 Mbl2~502（訪談）知他以「20＝5×3＋5」錯誤推論「$A_{20}＝A_5×3＋A_5$」，其中 A_{20}、A_5 代表序列：A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、……A_{20}……中的第 20 項及第 5 項，此迷失概念讓他未能更上一層樓。

【原案 5.3】

gm3-501a：（11-22-2001）……第一個圖到第二個圖是在 T 的三個頂點，再加上一個黑點，……一直加就可以知道答案了。

gm3-501b：5＋3＝8，8＋3＝11，……61＋3＝64，第 20 個「T」的答案是 64。

小結：由 gm3-501a 之「T」知 gm3 以整體辨識圖形（L1-5）；由 gm3-501b 之「＋3」知 gm3 能比較連續項差異（L2-3）；再由 gm3-501b 之「5＋3＝8，8＋3＝11，……61＋3＝64」知 gm3 以遞迴法強求第 20 個 T 個數，故未能更上一層樓。

【原案 5.4】

bh3-501a：（11-22-2001）這一題的規律……是 8－5＝3，所以就是每個 T 圖＋3 個黑點

bh3-501b：第一圖是 5 個
第二圖是 5＋3
第三圖是 5＋3＋3
第四圖是 5＋3＋3＋3
第五圖是 5＋3＋3＋3＋3
第六圖是 5＋3＋3＋3＋3＋3
第七圖是 5＋3＋3＋3＋3＋3＋3
第八圖是 5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3
第九圖是 5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3
第十圖是 5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3

小結：由 bh3-501a 之「T 圖」知 gm3 以整體辨識圖形（L1-5），由「＋3」知 bh3 能比較連續項差異（L2-3）；由 bh3-501b 之「5，5＋3，……5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3」數學式知 bh3 能辨認每項結構間的關係（L2-1）；但 bh3 卻未將其歸納如「5，……5＋3×9」，表現出以未歸納之數學式表示樣式結構（L2-10）。bh3 未做進一步推論。

【原案 5.5】

Mbh1-501a：（11-07-2001）橫的每次加 2，直的每次加 1。

Mbh1-501b：第三個是橫 7 直 4，第四個是橫 9 直 5，第五個是橫 11 直 6，……第二十個是橫 41 直 21。

Mbh1-502：（12-03-2001）再把直 21 乘以 5 就是 105，再 41 乘以 5 就是 205，答案就是直 105 橫 205。

訪談紀錄

Mbh1-502 S：因為橫的每次加 2，直的每次加 1，所以第五個是橫 11 是第一個 3 加 2 加 2 加 2 加 2，直 6 是第一個 2 加 1 加 1 加 1 加 1，……。

小結：由 Mbh1-501a 及 Mbh1-501b 之「橫的……直的」知 Mbh1 以組合整體去辨識圖形（L1-1）。由 Mbh1-501b 之「橫 7 直 4，橫 9 直 5，……」及 Mbh1~502 之「橫的每次加 2，直的每次加 1」知他能比較連續項差異（L2-3）。由 Mbh1~502 之「橫 11 是第 1 個 3 加 2 加 2 加 2 加 2，直 6 是……」知 Mbh1 能辨認每項結構間的關係（L2-1）；但 Mbh1 卻未將其歸納如「3＋2×4，……」，表現出以未歸納之數學式或文字表示樣式結構（L2-10）。由 Mbh1-502 知 Mbh1 有「A_{100}＝A_{20}×5」迷失概念，故未能更上一層樓。

【原案 5.6】

Mbm1-501a：（12-04-2001 01:15 PM）因為圖一是 5 個，所以每一個圖都是加 3。

Mbm1-501b：圖五就是 17，第二十個圖就是 5＋19 個 3。

Mbm1-502：（12-04-2001 01:27PM）第一○○個圖是 5＋99 個 3，第 n 個數是 5＋（n－1）個 3。

訪談紀錄

Mbm1-501 T：T 圖像ㄐ、ㄑ、ㄒ的ㄒ。

Mbm1-502 S：後面的 T 比它前面的 T 上面多兩個黑點，下面多一個黑點。

……

Mbm1-504 S：第三個是 5＋2 個 3，第四個是 5＋3 個 3，就這樣一直下去。

小結：由 Mbm1~501 之「ㄒ」及 Mbm1~502（訪談）知 Mbm1 以整體辨識圖形（L1-5）；由 Mbm1-501a 之「加 3」知 Mbm1 能比較連續項差異（L2-3）；由 Mbm1~504 及 Mbm1-501b 之「第二十個圖就是 5＋19 個 3」知 Mbm1 能辨認每項結構間的關係（L2-1）；由 Mbm1-502 之「第 n 個數是 5＋（n－1）個 3」知他能以公式或定義分類樣式（L3-1）；再由 Mbm1-502「第一○○個圖……」知他能處理遠處問題（L3-7）。

【原案 5.7】

gh1-501a：（11-02-2001）第一個 T 上排是 3 個，往下也是 3 個，第二則是上是 5 往下是 4 個，第三是上排 7 下 5，3、3，5、4，7、5。

gh1-501b：上排的順序應該是由 3 開始依序加 2，以 3、5、7、9、11、13、15……。

而下排是由 3 開始依序加 1，3、4、5、6、7、8、9、10、11……。

gh1-501c：第五的算法，上排：3＋（2×4）等於 11，

下排：3＋（1×4）等於 7；11＋7 等於 18

第十的算法，上排：3＋（2×9）等於 21，

下排：3＋（1×9）等於 12；21＋12 等於 33。

gh1-502：（11-15-2001）一○○圖的算法，3＋（2×99）等於 201，

3＋（1×99）等於 102，再相加。

小結：由 gh1-501a 知 gh1 之「上排、下排」知 gh1 先以組合整體去辨識圖形（L1-1），才有「3、3，5、4，7、5」計數；由 gh1-501b 之「上排……由 3 開始依序加 2，下排……由 3 開始依序加 1」知她能比較連續項差異（L2-3）；由 gh1-501c 及 gh1-502 知她能辨認每項結構間的關係（L2-1），即每項由兩個不同等差序列組成；由 gh1-502 之「一○○圖的算法」知她能以公式或定義分類樣式（L3-1），亦能處理遠處問題（L3-7），雖然她忽略了要將上、下排重疊之一點扣除。

【原案 5.8】

Mgh2-501a：（11-07-2001）第一個 T 是 5 個也就是 1、1、3，第二個 T 是 8 個也就是 2、2、4，第三個 T 是 11 也就是 3、3、5，一直下去 4、4、6，5、5、7。

Mgh2-501b：……第一個數是 T 左邊的點，第二個數是 T 右邊的點，第三個數是 T 下面的點。

Mgh2-502a：（11-15-2001）第五個 T 是 5、5、7，有 17 個點，第六個 T 是 6、6、8。所以第十個 T 是 10、10、12，有 32 個點，第二十個 T 是 20、20、22，有 62 個點，以此類推到第 100 個就是 100、100、102，有 302 個點。

Mgh2-502b：它們是 3 倍又 2。

<u>訪談紀錄</u>

Mgh2-501 T：爲什麼你知道第二十個 T 是 20、20、22 呢？

Mgh2-502 S：因爲 T 左邊的點、右邊的點恰好和第幾個 T 的第幾相同，下面的點則是第幾個加 2。

Mgh2-503 T：爲什麼是 3 倍又 2？

Mgh2-504 S：因爲第十個 T 有 32 個點，第二十個 T 有 62 個點，第一○○個 T 有 302 個點，它們是第幾個 T 的第幾乘 3 加 2。

小結：由 Mgh2-502（訪談）之「左邊、右邊、下面」知 Mgh2 以組合整體去辨識圖形（L1-1）；由 Mgh2-502 之知她能辨認每項結構間的關係（L2-1），即每項由三個不同等差序列組成；由 Mgh2-501a「1、1、3，2、2、4，3、3、5，……」看出 Mgh2 能比較連續項差異（L2-3），即依序加 1；由 Mgh2~502（訪談）之「T 左……右邊的點恰好和第幾個 T 的第幾相同，下面的點則是第幾個加 2」知她能以公式或定義分類樣式（L3-1）；由 Mgh2-502a 之「第一○○個就是 100、100、102」知她能處理遠處問題（L3-7）；由 Mgh2-502b 之「3 倍又 2」及 Mgh2~504 之「第幾個 T 的第幾乘 3 加 2」知她將推論一般化或改變（L3-3）。

（三）第七題之原案與分析

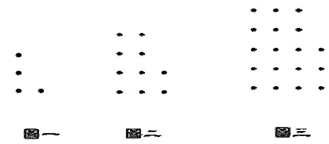


圖 5　第七題

【原案 7.1】

Mgh2-701a：（12-18-2001）第一個凹圖是用 4 個圓圈所組成，第二個凹圖是用 10 個圓圈所組成。

Mgh2-701b：第一個圖和第二個圖差在第一個圖的外圈橫排加上 3 個圓圈，外圈直排加上 4 個，就等於第二個圖哩！以此類推，……就知道答案了。

小結：由 Mgh2-701a 之「凹圖」知 Mgh2 以整體辨識圖形（L1-5）；由 Mgh2-701b 知她對圖形結構沒有正確概念，故 Mgh2 解題失敗。

【原案 7.2】

bh5-701a：（12-06-2001）第一個圖是 4 個，第二個圖是 10 個，第三個圖是 18 個。

bh5-701b：第一個加 6 就等於第二個，第二個加 8 就等於第三個，6＋2＝8，8＋2＝10，10＋2＝12，第三個加 10 就等於第四個，第四個加 12 就等於第五個答案。

小結：由 bh5-701a 之「4 個、10 個、18 個」知 bh5 以計數法辨識樣式（L1-7）；由 bh5-701b 之「加 6……，加 8……，加 10」知 bh5 能比較連續項差異（L2-3），即加數是依序加 2。bh5 未做進一步推論。

【原案 7.3】

gh4-701a：（12-06-2001）圖一有 4 個，因爲一行有 3 個圓形，而圖一總共有一行又 1 個圓圈。圖二有 10 個，因爲一行有 4 個圓形，而圖二總共有二行又 2 個圓圈。圖三有 18 個，因爲一行有 5 個圓形，而圖

三總共有三行又 3 個圓圈。

gh4-701b：每個圓形都會多加 1，原本一行只有 3 個圓圈，卻慢慢地一個一個增加……，以此方法下去算圖五、圖十。

gh4-702a：（12-17-2001）……圖五有 40 個，一行有 7 個圓圈，……圖六有，……圖九有，……圖十有 130 個，一行有 12 個圓圈，共有十行又 10 個圓圈。

gh4-702b：……我認為到圖一○○是一百行又 100 個圓圈，到圖 n 是 n 行又 n 個圓圈。

小結：由 gh4-701a 之「……一行又 1 個圓圈、……二行又 2 個圓圈、……」知 gh4 能以組合整體去辨識圖形（L1-1）及辨認每項結構間的關係（L2-1），再去計數「4 個、10 個、……」；由 gh4-702a 知 gh4 未將文字歸納如「3×1＋1，4×2＋2，……，102×100＋100」，表現出以未歸納之數學式表示樣式結構（L2-10）；由 gh4-701b 之「加 1」知 gh4 能比較連續項差異（L2-3）。

【原案 7.4】

Mgh1-701a：（12-13-2001）第一個是 4，第二個是 10，第三個是 18，

Mgh1-701b：所以上一個加上 4＋2x 個數就是下一個數，因此第四個是 28，第五個就是 40 了，而第二十個就是 460 了。

Mgh1-702：（12-25-2001）第一○○個：4＋〔（4＋2）＋〔（4＋2）＋2〕＋〔〔（4＋2）＋2〕＋2〕＋〕＋〔〔〔（4＋2）＋2〕＋2〕＋2〕＋……〕＝第一○○個的答，〔　〕共（100-1）次。

第 n 個：4＋〔（4＋2）＋〔（4＋2）＋2〕＋〔〔（4＋2）＋2〕＋2〕＋〕＋〔〔〔（4＋2）＋2〕＋2〕＋2〕＋……〕＝第 n 個的答，〔　〕共（n-1）次。

小結：由 Mgh1-701a 之「4 個、10 個、18 個」知 Mgh1 以計數法辨識樣式（L1-7）；由 Mgh1-701b 之「加上 4＋2x」知 Mgh1 能比較連續項差異（L2-3）；由 Mgh1-702 之「第一○○個：……」知 Mgh1 能辨認每項結構間的關係（L2-1）及以未歸納之數學式或文字表示樣式結構（L2-10），同時知她以公式或定義分類樣式（L3-1），但因使用逐一列舉法（L3-2），故無法處理遠處問題。

【原案 7.5】

Mbm1-701：（12-18-2001）因為橫的比第幾個圖的幾多 1 所以是 6，直的多 2 所以是 7，因為每個都差 2 個合起來就是長方形。所以第五個圖……第十個圖是 11×12＝132，132－2＝130……。

Mbm1-702：（12-25-2001）第一○○個圖因為橫的多 1，所以是 101，直的多 2，所以是 102。101×102＝10302，每個圖角落都少 2，所以 10302－2＝10300。

第 n 個圖：（n＋1）×（n＋2）－2

小結：由 Mbm1-701 之「差 2 個……的長方形」知 Mbm1 以整體辨識圖形（L1-5），而「橫的、直的」知他給圖形物件做相關命名（L1-3）；由 Mbm1-702 之「第一○○個圖……橫的多 1……101，直的多 2……102」知他能辨認每項結構間的關係（L2-1）；由「101×102……－2」知 Mbm1 能處理遠處問題（L3-7）；由「（n＋1）×（n＋2）－2」知 Mbm1 能以公式或定義分類樣式（L3-1）。

【原案 7.6】

Mgm2-701：（12-11-2001）圖一：1×2＋2×1＝4，圖二：2×2＋3×2＝10，圖三：3×2＋4×3＝18，圖四：4×2＋5×4＝28，圖五：5×2＋6×5＝40,……到圖二十：20×2＋21×20＝460。

Mgm2-702：（12-18-2001）圖一○○：100×2＋101×100。

訪談紀錄

Mgm2-701 S：看成上、下兩個長方形。

Mgm2-702 S：上長方形的高永遠是 2，上長方形的底和下長方形的高一樣，它是都是第幾圖的幾，而下長方形的底多加 1。

小結：由 Mgm2-701（訪談）之「上下兩個長方形」知 Mgm2 以組合整體去辨識圖形（L1-1）；由 Mgm2-702 之「高與底」知她給圖形物件做相關命名（L1-3）；由 Mgm2-701 之「1×2＋2×1，2×2＋3×2……」知 Mgm2 能比較連續項差異（L2-3）及辨認每項結構間的關係（L2-1）；由 Mgm2-702 之「100×2＋101×100」知 Mgm2 能處理遠處問題（L3-7）；由 Mgm2-702（訪談）知 Mgm2 能以公式或定義分類樣式（L3-1）。

（四）三題分析之結果

由以上三題 21 件原案分析可知，國小高年級學童的圖形樣式思考支持 Fuys 等人（1988）提出的 van Hiele 思考層次部分行爲。21 件原案中，有 2 個學生行爲分派至層次一，如 5.1 之 mgm1 只有 L1-1 行爲；有 9 個學生行爲分派至層次二，如原案 1.1 之 bm1 有 L1-7 及 L2-3 行爲；有 10 個學生行爲分派至層次三，如原案 5.6 之 mbm1 有 L1-5、L2-1、L2-3、L3-1、L3-7 行爲。因此，學生對圖形樣式規律的思考層次行爲符合 van Hiele 之理論，學生圖形樣式之思考仍可分派至某一個層次。

二、van Hiele 圖形樣式思考層次發展

本節將進一步分析層次二及層次三，並藉此擴展 van Hiele 理論之應用範疇至 van Hiele 圖形樣式思考層次。

（一）思考層次二

原案中達層次二之學生有不同之行爲表現。例如在第一題，原案 1.2 之 gh1 能比較連續項差異（L2-3）是「加 4、6、8、10……」。原案 1.4 之 Mgl2 知「每一個新圖增加一層且每一層增加一點」，也有 L2-3 行爲，Mgl2 尚能辨認每項結構間的關係（L2-1）如「2，3＋3，4＋4＋4，……」，但卻未歸納（L2-10）如「2，3×2，4×3……」。

在第五題，原案 5.2 之 Mbl2 及原案 5.3 之 gm3 能知連續項差異（L2-3）是＋3。原案 5.4 之 bh3 能以數學式比較連續 T 圖差異（L2-3）及辨認每項結構間的關係（L2-1）如「5，5＋3，……5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3」，但卻未歸納（L2-10）如「5，5＋3，……5＋3×9」。原案 5.5 之 Mbh1 亦知樣式中連續項差異（L2-3）爲「橫的每次加 2，直得每次加 1」，Mbh1 辨認 T 圖結構間的關係（L2-1）如「第五個橫……3 加 2 加 2 加 2 加 2，直……2 加 1 加 1 加 1 加 1」；但 Mbh1 也未歸納（L2-10）如「3＋2×4，2＋1×4」。

在第七題，原案 7.2 之 bh5 能知連續項差異（L2-3）是依序加 2。原案 7.3 之 gh4 能辨認每項結構間的關係（L2-1）爲「一行又 1 個圓圈、二行又 2 個圓圈、……」，並知連續項差異（L2-3）是「一行圓圈一個一個增加」；但 gh4 亦未歸納（L2-10）

如「3×1＋1，4×2＋2，……」。

依據研究者修正的圖形樣式思考層次之行爲描述，上述學童皆已達層次二，然而由上可知，有的學童只能比較連續項差異（L2-3）而已，有的則尙能辨認每項結構間的關係（L2-1），甚至以未歸納之數學式或文字表示樣式（L2-10）；所以是否有 L2-1 及／或 L2-10 行爲決定層次二之思考水平。因此，研究者將圖形樣式思考層次二再細分爲二 A 及二 B，其中在層次二 A 者能比較連續項差異（L2-3），層次二 B 者除了 L2-3 行爲外，尙且能定義每項結構間的關係（L2-1），甚至能以未歸納之數學式或文字描述表示樣式結構（L2-10）。因此，如原案 7.2 之 bh5 只達層次二 A，原案 7.3 之 gh4 則達層次二 B。

（二）思考層次三

原案中達層次三之學生有不同之行爲表現。例如在第一題，原案 1.6 之 Mgh1 使用逐一列舉法（L3-2），如「圖一〇〇是 2＋4＋6＋……＋（200）」，但 Mgh1 未將其歸納如「（2＋200）×100÷2」，故無法處理遠處問題。原案 1.5 之 gh2 除了有 L3-1 行爲外，尙能處理遠處問題（L3-7），如「第一〇〇圖是 101 乘於 100」。原案 1.7 之 bh2 知「圖一〇〇時是 100×101＝10100」，亦有 L3-7 行爲，並能以公式分類樣式（L3-1），如 n×（n＋1）。

在第七題，原案 7.4 之 Mgh1 使用逐一列舉法（L3-2）列出「第一〇〇個：4＋〔（4＋2）＋〔（4＋2）＋2〕＋〔〔（4＋2）＋2〕＋2〕＋〕＋……〕」，但她因未將其歸納如「4×100＋2×4950」，故無法處理遠處問題。而原案 7.5 之 Mbm1，和原案 7.6 之 Mgm2 能以公式分類樣式（L3-1），如「第 n 個圖：（n＋1）×（n＋2）－2」，或「上長方形的高永遠是 2，上長方形的底和下長方形的高一樣，它是都是第幾圖的幾，而下長方形的底多加 1」，進而處理遠處問題（L3-7），例如第一〇〇個圖：101×102－2＝10300 或圖二十：20×2＋21×20＝460。

依據研究者修正的圖形樣式思考層次之行爲描述，上述學童皆已達層次三，然而由上可知，有的學童只使用逐一列舉法（L3-2），而無法處理遠處問題；有的除了有 L3-2 行爲外，尙能處理遠處問題（L3-7），並能以公式或定義分類樣式（L3-1），甚至將推論一般化或改變（L3-3）；所以是否有 L3-7 及／或 L3-1 行爲決定層次三之思考水平。因此，研究者將圖形樣式思考層次三再細分爲分爲三 A

及三 B，其中在層次三 A 者可能使用逐一列舉法（L3-2），層次三 B 者可能有 L3-2 行爲外，尙能處理遠處問題（L3-7），甚至能以公式或定義分類樣式（L3-1），或許進一步也能將推論一般化或改變（L3-3）。因此，如原案 1.6 之 Mgh1 只達層次三 A，原案 1.5 之 gh2 及原案 1.7 之 bh2 則達層次三 B。

（三）van Hiele 圖形樣式思考層次

研究者以 Fuys 等人（1988）對 van Hiele 層次的描述和例子爲基礎，修正成圖形樣式思考層次之行爲描述，並將層次二及層次三再細分爲層次二 A、二 B 及層次三 A、三 B，據此擴展 van Hiele 理論之應用範疇至 van Hiele 圖形樣式思考層次，其將指出國小高年級學童對圖形樣式規律的思考層次。此層次是循序漸進的，解題者有上一層次之行爲，才有機會產生下一層次之行爲，其可由上一層次至下一層次之 A 或 B，且某一層次之 A 亦可至同一層次之 B。由於本模式強調的是解題者思考之行爲，對於解題過程中行爲是否會重複出現或來回發生並不考量，因而解題者思考之路徑可如圖 6 所示，但每一條路徑可能因解題未成功而中途停止。例如，

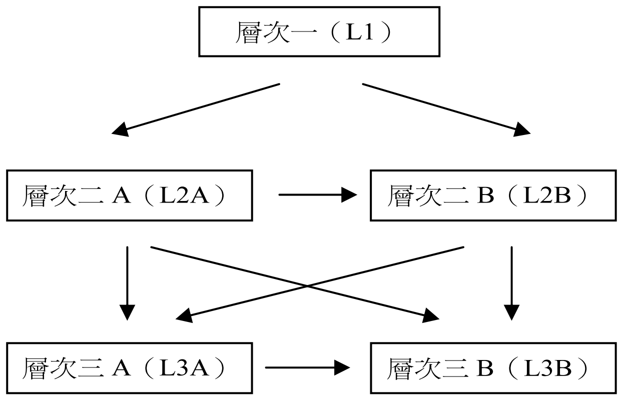


圖 6　van Hiele 圖形樣式思考層次

原案 1.1 之 bm1 由 L1：ML1-3（L1-7），到 L2A：ML2-1（L2-3）；

原案 1.4 之 Mgl2 由 L1：ML1-1（L1-1），到 L2A：ML2-1（L2-3），到 L2B：ML2-2（L2-1）及 ML2-3（L2-10）；

原案 1.7 之 bh2 由 L1：ML1-2（L1-5）、ML1-5（L1-3），到 L2A：ML2-1（L2-3），到 L2B：ML2-2（L2-1）、ML2-4（L2-4），到 L3B：ML3-1（L3-1）及 ML3-3（L3-7）；

原案 7.4 之 Mgh1 由 L1：ML1-3（L1-7），到 L2A：ML2-1（L2-3），到 L2B：ML2-2（L2-1）、ML2-3（L2-10），到 L3A：ML3-1（L3-1）及 ML3-2（L3-2）。

三、van Hiele 圖形樣式思考層次的特性

本文發現 van Hiele 圖形樣式思考層次也有 Crowley（1987）描述 van Hiele 幾何思考層次之次序性、內因性與外因性，以及語言性；至於 Crowley 指出與教學有關之提升性及不配合性，因非本文探討之範疇，故不予討論。

（一）次序性

學童解決圖形樣式問題之思考層次是循序漸進的，後一個層次的概念是來自於前一個層次的概念。例如原案 1.4 之 Mgl2 達層次二 B，Mgl2 首先把圖形的外貌視爲「一層、二層、三層」等所組成之整體（L1-1）；此層次一之概念引導 Mgl2 發展出「圖 1 一層（2 個點），圖 2 二層（3 個點），圖 3 三層（4 個點），……」層次二 B 之概念，而列出「2，3＋3，4＋4＋4，……」解題過程，其反應出 Mgl2 能比較連續項差異（L2-3）、定義每項結構間的關係（L2-1），以及能以未歸納之數學式或文字表示樣式結構（L2-10）。原案 5.2 之 Mbl2 達層次二 A，一開始 Mbl2 不思考圖形特徵，直接計數（L1-7）「5 個，8 個，11 個」；此層次一之概念引導 Mbl2 發展出「＋3」層次二之概念，而列出「5＋3＝8，8＋3＝11，11＋3＝14，……」解題過程，其反應出 Mbl2 能比較連續項差異（L2-3）。原案 7.5 之 Mbm1 達層次三 A，Mbm1 首先視圖形爲「差 2 個……的長方形」（L1-5），並將長方形之長、寬命名爲「橫、直」（L1-3）；此層次一之概念引導 Mbm1 發展出「面積－2」層次二之概念，而列出「7×6＝42，42－2＝40，……22×21－2」解題過程；其反應出 Mbm1 能定義每項結構間的關係（L2-1）。進一步此層次二之概念引導 Mbm1 發展出「以（n＋1）×（n＋2）－2 求第 n 個圖形黑點數」層次三的概念，其反應出 Mbm1 能以公式或定義分類樣式（L3-1）及處理遠處問題（L3-7）。此三件原案皆說明，後一個層次的概念必先有前一個層次某個概念的引導才能發生，此與 Crowley（1987）所謂之次序性吻合。

（二）內因性與外因性

在某一圖形樣式思考層次的性質是屬於內在的性質，到了下一個層次，此一性質就有可能成為外顯的性質。在層次二 B 之學生能比較樣式中連續項的差異（L2-3），也能定義每項結構間的關係（L2-1），甚至能以未歸納之數學式或文字表示樣式結構（L2-10），擁有此層次者極有潛力將其圖形樣式之思考提升到層次三。例如原案 1.4 之 Mgl2 將圖形以數學式表示如「2，3＋3，4＋4＋4，……」，原案 5.4 之 bh3 將樣式中 T 圖以數學式表示如「5，5＋3，……5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3」，原案 5.5 之 Mbh1 亦將 T 圖以文字描述如「第五個橫……3 加 2 加 2 加 2 加 2，直……2 加 1 加 1 加 1 加 1」。

上述三位學生皆有屬於層次二 B 之 L2-3、L2-1 及 L2-10 行為，他們所呈現出「怎樣想到的」解題過程，是易於繼續發展為明確的規則，而形成數學發現。例如 Mgl2 之數學式容易被引導至「圖一：2，圖二：3×2，圖三：4×3，……」，而讓人意識到圖形個數和位置間之關係，甚至發展出「圖一○○：101×100，或圖 n：（n＋1）×n」之「函數概念」。bh3 亦易被引至「圖一：5，圖二：5＋3，圖三：5＋3×2，……」，而意識到每一個新圖是連續增加了幾次差距或發現圖形個數和位置間之關係，甚至發展出「圖一○○：5＋3×99，或圖 n：5＋3×（n－1）」之「函數概念」。相同的 Mbh1 也可能發展出「第一○○個橫線是 3 加 100 次的 2，直線是 2 加 100 次的 1」之「函數概念」；這些皆是屬於層次三以公式或定義分類樣式（L3-1）、處理遠處問題（L3-7）之行為。因此，「函數概念」的性質在層次二 B 可能不明顯，但在層次三卻是明確可知的，即「函數概念」是圖形樣式思考層次二 B 內在的性質，可能變為下一個層次（即層次三）的外在性質，此與 Crowley（1987）所謂的內因性與外因性吻合。

（三）語言性

每一個圖形樣式思考都有屬於該層次自己的語言、符號，以及這些符號之間的關聯系統。例如屬於層次二 B 階段的語言、符號，以及它們之間的關聯系統，必須經過修正，才能符合層次三 A 或三 B；相同的屬於層次三 A 者，亦須修正，才能符合層次三 B。

在層次二 B 之學生有的能以未歸納之數學式或文字表示樣式結構（L2-10），

例如原案 5.4 之 bh3 將 T 圖以數學式表示如「5，5＋3，……5＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3」，原案 5.5 之 Mbh1 亦將 T 圖以文字描述如「第五個橫……3 加 2 加 2 加 2 加 2，直……2 加 1 加 1 加 1 加 1」。這些數學式或文字描述就是屬於層次二 B 的獨特語言，其必須經過修正如「圖一○○：5＋3＋3……＋3，共（100－1）次 3」或「第一○○個橫……3 加 2 加 2……，直……2 加 1 加 1……，而加 2、加 1 共（100－1）次」，即對先前發現之性質給予逐一列舉（L3-2），才是屬於層次三 A 正確的語言。進一步修正如「圖一○○：5＋3×99」或「第一○○個橫是 3＋2×99，直是 2＋1×99」，即能處理遠處問題（L3-7），甚至修正如「圖 n：5＋3×（n－1）」或「第 n 個橫是 3＋2×（n－1），直是 2＋1×（n－1）」，即能以公式或定義分類樣式（L3-1），才是屬於層次三 B 正確的語言。

在層次三 A 之學生會對先前發現之性質給予逐一列舉（L3-2），例如原案 7.4 之 Mgh1 將樣式中第一○○個圖以數學式加上文字描述表示如「4＋〔（4＋2）＋〔（4＋2）＋2〕＋……＋〔〔〔（4＋2）＋2〕＋2〕＋2〕＋……〕＝第一○○個的答，〔　〕共（100-1）次」。這就是屬於層次三 A 獨特語言，其亦必須經過修正如「第一○○個：4×100＋2×4950」，而能處理遠處問題（L3-7），才是屬於層次三 B 正確的語言。因此每一層次都有屬於自己層次獨特的語言，這些語言必須經過修正，才能符合下一層次的語言特性，此與 Crowley（1987）所謂的語言性吻合。

四、解題方式與 van Hiele 圖形樣式思考層次及代數知識

由上可知，學童對圖形樣式所表現之不同「行為」會影響 van Hiele 樣式思考層次二及三的思考水平，而學童所表現之「行為」源自其「解題方式」。以下將解題方式與層次二及三關係分述如下：

（一）層次二 A：若學生僅使用一序列中連續圖形之間的關係解題，則只產生一個序列局部的規則（a local rule），例如原案 1.2 的 gh1：「2 個圈圈加 4 個圈圈就等於 6，6 個圈圈加 6 等於 12，依序就是 4、6、8、10……」，學生只有「能比較連續項差異（L2-3）」的行為，其僅能以一個接一個之遞迴法，將每一個圖形個數強求出來。

（二）層次二 B：若學生除了能用一序列中連續圖形之間的關係（L2-3）解

題之外，尚能用圖形的結構之間關係（L2-1），進而用數學式或文字描述（但卻未歸納）去表示樣式結構（L2-10），例如原案 1.4 的 Mgl2：「每一個新圖增加一層且每一層增加一點」、「2，3＋3，4＋4＋4，……」。其表示學生已具有代數知識建造的芻形，因其易被引導到「圖一：2，圖二：3×2，圖三：4×3，……」，而意識到每一個新圖是連續增加了幾次差距或發現圖形個數和位置間之關係，此總體的規則（a global rule），甚至可處理遠處問題，如「圖一○○：101×100，而發展出「圖 n：（n＋1）×n」之代數的「函數概念」。

（三）層次三 A：若學生能使用逐一列舉法（L3-2）解題，表示已能察覺圖形的結構之間關係（L2-1），例如原案 1.6 之 Mgh1 使用逐一列舉法（L3-2）：「圖一是 2，圖二是 2＋（4），圖三是 2＋4＋（6），……圖一○○是 2＋4＋6＋……＋（200）」。其表示學生已經意識到每一個新圖是連續增加了多少差距，以及發現圖形結構和位置間之關係，此總體的規則，表示此國小高年級學生已具有代數知識建造的能力，因這些列舉圖形結構之方法是未來學習代數（如等差級數求和）的基礎。

（四）層次三 B：若學生用逐一列舉法（L3-2）解題外，尚能處理遠處問題（L3-7），甚至能以公式或定義分類樣式（L3-1），或許進一步也能將推論一般化或改變（L3-3）。例如原案 1.5 之 gh2：「圖三是 4 乘於 3，……第一○○圖是 101 乘於 100」，除了有 L3-1 行為外，尚能處理遠處問題（L3-7）；原案 1.7 之 bh2：「圖五是 5×（5＋1），……圖一○○時是 100×101＝10100，圖 n 就是：n×（n＋1）」，亦有 L3-2、L3-7 行為，並能以公式分類樣式（L3-1）。其表示學生能用乘法趨近去解題，不僅已經能製造該樣式總體的規則，並已有代數的「函數概念」。

因此學生若能用幾何圖形結構之間的關係來辨認樣式，則有助於圖形樣式思考層次的提升及代數知識的建造。此支持 Ma（2007）的論點，若學生以幾何圖形結構之間的關係去解圖形樣式題，則其將有發展代數一般化的潛能。

伍、結論與建議

一、結論

（一）國小高年級學童對樣式規律的思考支持 van Hiele 之層級，其仍可分派至某一個層次。

（二）本文以 Fuys 等人（1988）對 van Hiele 層次的描述和例子為基礎，研究者修正成圖形樣式思考層次之行為描述，並依學生實際解決圖形樣式題之表現，將層次二及層次三再細分為二 A、二 B 及三 A、三 B，而發展 van Hiele 圖形樣式思考層次。其指出國小高年級學童對圖形樣式規律的思考層次，其中層次一、二、三各有五、四、四個行為描述。

（三）van Hiele 圖形樣式思考層次有 Crowley（1987）描述 van Hiele 幾何思考層次之次序性、內因性與外因性，以及語言性。

（四）學生若能用幾何圖形結構之間的關係來辨認樣式，則有助於圖形樣式思考層次的提升及代數知識的建造。

二、建議

（一）研究者成功地將 van Hiele 理論應用到數學的「圖形樣式解題」上，但本文乃探索性研究，因此，建議未來有嚴謹設計之後續研究者可利用本文結果去進行大樣本之檢測，例如：思考層次行為是否仍有跳躍現象等，使此研究的結果更具推論性。同時本文乃拋磚引玉之用，建議以後之研究可進一步將 van Hiele 理論觀察和應用在數學及其他學科上，以呼應 van Hiele 本人的建議。

（二）由於圖形樣式活動是學童進入代數文化之啓蒙，因此乃建議今後有關當局在編寫教科用書之際，可考慮將 van Hiele 思考發展模式應用在（圖形）樣式上，以做為設計代數課程的依據。

致謝：本研究承蒙國科會專題研究計畫經費補助（NSC 90-2521-S-275-001），計畫主持人馬秀蘭，特此致謝。

參考文獻

王文科（2001）。**教育研究法**。臺北市：五南。

左臺益、梁勇能（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報，46**（1、2），1-20。

吳德邦（1999）。臺灣中部地區國小學童 van Hiele 幾何思考層次之研究——筆試部分。載於國立臺北師範學院舉辦之**「八十八學年度師範學院教育學術論文發表會」論文集**（頁35-66），臺北市。

吳德邦（2004）。**使用 VAN HIELE 五階段學習模式開發九年一貫課程第一階段圖形與空間教材教法之詮釋性研究**。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（NSC92-2522-S-142-004）。臺中市：國立臺中師範學院。

吳德邦、李懿芳、馬秀蘭（2006）。立體幾何思考層次測驗編製歷程之研究。載於吳德邦（主編），**數學考卷編製暨評析研討會論文集暨會議實務彙編**（頁 584-608）。臺中市：國立臺中教育大學。

吳德邦、馬秀蘭、藍同利（2006）：探究國小視覺型與觸覺型兒童在繪製三角形活動之概念分析。**國立臺中教育大學學報，20**（2），99-138。

林軍治（1992）。**兒童幾何思考之 VAN HIELE 水準分析研究——VHL、城鄉、年級、性別、認知型式與幾何概念理解及錯誤概念之關係**。臺中市：書恒。

洪萬生（2003）。**青少年的立體幾何概念發展研究**。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（NSC91-2522-S-003-001）。臺北市：國立臺灣師範大學。

馬秀蘭（2004）。數學乘除問題情境發展之研究——以 BBS 為管道。**科學教育學刊，12**（1），53-81。

教育部（1993）。**國民小學課程標準**。臺北市：中正。

劉好（1993）。國小數學科新課程中幾何教材的設計。載於國立嘉義師範學院舉辦之**「八十二學年度數學教育研討會論文暨會議實錄彙編」**（頁 69-79）。嘉義市：國立嘉義大學。

盧銘法（1999）。國小學童四邊形幾何概念之分析。**中師數理學報，3**（1），5-1-5-33。

謝貞秀、張英傑（2003）。國小三四年級平面圖形概念之探究。**國立臺北師範學院學報，16**（2），97-134。

Assessment of Performance Unit (n.d.). *Mathematical development: A review of monitoring in mathematics 1978 to 1982*. Slough: NFER.

Biggs, E., & Shaw, K. (1985). *Maths alive!* London: Cassell.

Clements, D. H., Swaminthan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 192-212.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

De Block-Docq, C. (1994). Forms of mathematical thought of twelve-year-old students at tiling problems. *Educational Studies in Mathematics*. *27*(2), 165-189.

English, L. D., & Warren, E. A. (1999). Introducing the variable through patter exploration. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp. 140-145). Reston, VA: NCTM.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Golinskaia, L. (1997). *Van Hiele theory in Russian and United States geometry curricula.* Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Columbia.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth generation evaluation*. Thousand Oaks, CA, Sage.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L., & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-83). Wellington House, London: Cassell.

Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *3*(6), 340-344.

Jamime, A., & Gutierrez, A. (1995). Connecting research to teaching: Guidelines for teaching plane isometries in secondary school. *Mathematics Teacher, 88*(7), 591-597.

Land, J. E. (1991). Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions (Doctoral dissertation, Boston University, 1990). *Dissertation Abstracts International, 51*, 3659A.

Lee, W. I. (1999). *The relationship between students' proof-writing ability and van Hiele levels of geometric thought in a college geometry course* (*college students*). Unpublished doctoral dissertation, University of Northern Colorado, Colorado.

Ma, H. L. (2005). *Bulletin board systems: Another supporting channel for helping students work on mathematics*. Paper presented at International Conference on Education, Redesigning Pedagogy. Nanyang Technological University, Singapore.

Ma, H. L. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Aeo (Eds.), *Proc. of 31th Conf. of the Int. Group for the Psychol-*

ogy of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 225-232). Seoul, Korea: PME.

Ma, H. L., & Wu, D. B. (2006). The role of pattern in the algebraic concept learning via internet. In G. Dhompongsa, F. M. Bhatti & Q. Kristen (Eds.), *Proc. of Thailand international conference on 21st century information technology in mathematics education* (pp. 143-150). Chiang Mai, Thailand.

Malloy, C. E. (1999). Perimeter and area through the van Hiele Model. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *5*(2), 87-90.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/roots of algebra*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mayberry, J. W. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 58-69.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. London: Sage Publication.

Mistretta, R. M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence, 35*(138), 365-379.

National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the natron on the future of mathmatics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Naylor, M. (2002). Who am I? *Teaching PreK-8, 32*(4), 40-41.

Orten, A., & Orten, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orten (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104-120). London: Cassell.

Orten, J., Orten, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orten (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassell.

Penrose, R. (1991). *The emperor's new mind*. *Society, 17*(4), 447-462.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (*Final Report of the cognitive development and achievement in secondary school lgeometry project*). Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Fla: Academic Press.

Wu, D. B., & Ma, H. L. (2006). The distributions of van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proc. of 30th conf. of the int. group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 416-429). Prague, Czech Republic: PME.

Wu, D. B., Ma, H. L., Hsieh, K. J., & Li, Y. F. (2007). A study of the concept of solid geometry of elementary students from the 4th grades to the 6th grades in the general region of Taiwan. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Aeo (Eds.), *Proc. of 31th conf. of the int. group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, p. 295). Seoul, Korea: PME.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8) . Washington, DC: The Mathematical Association of America.