

教育研究集刊
第五十七輯第三期 2011 年 9 月 頁 37-73

不同等號概念之基模導向解題教學 實驗研究

陳嘉皇

摘要

本研究旨在針對不同等號概念之教材，進行基模導向解題教學實驗，以探索學生等號概念的表現，並歸納合宜之學習路徑，以做為日後改善代數推理教學與課程設計的依據。研究樣本為公立小學 12 名一年級學生，2 人一組，參與研究者設計之不同順序等號概念的教學實驗與測驗，資料分析與說明則採取質、量併陳方式來呈現。綜合研究發現，獲得以下結果：經不同等號概念之教學情境實驗後，學生能獲得等號反身性、單邊運算與雙邊運算相等關係的觀念；學生等號概念的學習以路徑「單邊運算→反身性→雙邊運算」之教學效果最佳，其次為「反身性→單（雙）邊運算→雙（單）邊運算」之教學順序；等號概念之間的轉化與連結，依學生認知能力不同而有不同表現。研究者根據發現結果提出建議，提供未來等號概念之教學與研究參考。

關鍵字：等號、分解、合成、基模

陳嘉皇，崑山科技大學通識教育中心助理教授

電子郵件為：chenchai@kbronet.com.tw

投稿日期：2010 年 10 月 8 日；修改日期：2011 年 7 月 23 日；採用日期：2011 年 9 月 6 日

Bulletin of Educational Research
September, 2011, Vol. 57 No. 3 pp. 37-73

A Schema-based Problem-solving Instruction Experiment of Different Concepts of the Equal Sign on First Graders

Chia-Huang Chen

Abstract

The goal of this study was to reevaluate the concept of the equal sign and implement schema-based problem-solving instruction experiment to understand the process of solving equation problems and the means of learning it. When taking a test, twelve first graders completed three sequential tasks specifying a concept related to the equal sign. The collected data were analyzed according to descriptive statistics with a qualitative approach. The results showed that most of the students were capable of acquiring the three concepts represented by the equal sign after such an experiment. The best method of learning the concepts of the equal sign involved the following sequences: 1) one-side operation $\rightarrow$ reflection $\rightarrow$ two-side operation; 2) reflection $\rightarrow$ one-side operation $\rightarrow$ reflection $\rightarrow$ two-side operation; or 3) reflection $\rightarrow$ two-side operation $\rightarrow$ one-side operation. Students of different cognitive abilities showed different degrees of performance in the transformation and connection of their concepts of the equal sign. These findings could support teachers engaging students in

Chia-Huang Chen, Assistant Professor, Center for General Education, Kun Shan University
E-mail: chenchai@kbronet.com.tw

Manuscript received: Oct. 8, 2010; Modified: July 23, 2011; Accepted: Sept. 6, 2011.

opportunities to learn the concepts of the equal sign, by demonstrating how instruction can be used to improve and guide the design of curricula.

Keywords: equal sign, decompose, regroup, schema

壹、緒論

等號對於理解算術或代數問題而言，是一種聰慧的符號概念。倘若學生欠缺這樣的理解，必然會對從算術轉移至代數學習將產生重大的阻礙（Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005）。研究指出，學生常把等號視為運算工具，並將之解釋成「發現總和」或「將答案放在一起」，凡在算式等號的右邊就必須是答案，不容許其他特例存在。以 Carpenter 等人（2003）的研究為例， $8 + 4 = () + 5$ 的括弧裡應填入什麼數字？許多學生會將答案寫成 12，原因在於運算產生的影響。當運算觀念建立後，要改變其想法則有困難。等號運算的觀念也會干擾學生對數學一般化的理解與運用，例如寫出錯誤的算式，無法對樣式的發展進行推理。一些學生雖採取等號關係的方式呈現問題，但因習慣於學校等號運算的教導，無法清楚了解問題的脈絡。有鑑於此，學者建議，若能給予合適的教學支持，協助證明等號為關係的符號，則學生在解題上將會有更好的表現（陳嘉皇，2008，2009；謝闔如，2010；Carpenter et al., 2003; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005）。

在小學裡，等號概念學習之內涵包括：一、加減兩步驟問題的記錄格式；二、得到答案的等號意義；三、相等關係的等號意義；四、等號的應用（國立教育研究院籌備處，2002）。教育部（2003）之《九年一貫課程綱要：數學領域》也明示，一年級學生需能「從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 $+$ 、 $-$ 、 $=$ 做橫式記錄與直式記錄，並解決生活中的問題」。在「具體情境中，認識等號兩邊數量一樣多的意義」。因為等號概念建立後，學生才能進一步「認識加法的交換律、結合律，並應用於簡化計算」。這樣的安排，無非希冀學生能利用加、減問題，從操作的活動與合宜的引導，充分理解與應用關係概念進行解題。因此，一年級學生若能正確地理解等號關係的概念，對其日後代數推理的學習應較能適應且有良好的表現。

運算是發展等號概念的基礎，但單邊運算的等式常誤導學生產生錯誤的等號概念。McNeil 等人（2006）的研究發現，等號兩邊運算的情境對於引導關係概念的理解最為有效，因為兩邊運算的情境符合「相等」概念的發展，學生可透過運

算、比較與觀察發現相等關係，包含反身性、對稱及交換律等數學知識，教師若能加以應用，且連結教學實務的教材，將可發展學生正確的等號觀念。審視現今國小數學教材教法，有關問題的安排與等式記錄，大都呈現等號左邊運算、右邊答案的模式，這樣的安排有其顧慮所在，一方面在於無合宜的教材與資訊提供，可做為教師專業發展、提升教學能力的基礎；另一方面則懷疑低年級學生是否具備足夠的認知能力，可接受不同等號概念的挑戰。關於前者，一些研究認為可透過相關學習理論的設計，引導學生建構堅實且正確的等號概念；而後者，已有研究建議，宜盡早安排兩邊運算的情境，提供學生理解不同情境產出之等號概念，以促進未來算術與代數的轉化和銜接（Carpenter et al., 2003; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005; McNeil et al., 2006）。

由於等號具有多元的意義，需藉由不同的情境以誘發學生發現「相等」的概念。學生入學前已具有數數、比較的知識，並運用解決算術問題。進入小學後，會教導數字之分解、組合、加減可逆運算等方法，這些能力若能堅實地發展且彈性地運用，對於解決算式或文字問題將有莫大的助益。然而，這些能力並非背誦練習即能獲得，應有一套實用且符合學生認知需求的教學模式予以支撐（陳慧姿，2009；陳麗華，1988）。有鑑於此，本研究擬以「基模導向解題教學」（schema-based problem-solving instruction）理論做為基礎，設計不同等號概念之情境，進行教學實驗，探索學生等號概念之學習情形與合適之學習路徑，進而協助其建立合宜的等號概念。本研究欲達成的目標如下：

一、設計不同等號概念之教學內容，進行等號概念基模導向解題教學研究，探究學生等號概念的表現。

二、從教學歷程發現學生合宜之等號概念學習路徑，以做為等號概念教學與課程設計之參考依據。

三、探討學生在基模導向解題教學模式實驗下，其等號概念轉化的情形。

貳、文獻探討

一、學生等號概念理解之探討

學生對等號所持的觀點，會影響其計算的結果。根據 Carpenter 等人（2003）的研究發現，學生面對問題時，對等號產出的意義，可分成下列五種反應：

（一）表示進一步的答案：以 $8 + 4 = \square + 5$ 為例，學生認為 $\square$ 的值是 12，表示等號左邊物件計算所得答案，等號是執行計算的指令，並未呈現兩邊數字的關係。

（二）表示式子中所有數字的總和：例如 $8 + 4 = \square + 5$ ，學生認為 $\square$ 的值是 17， $\square$ 表示需將等式中所有出現的數字加起來的意思。

（三）表示擴展問題的意義：例如 $8 + 4 = \square + 5$ ，學生認為 $\square$ 的值是 12，12 還需再計算為 $8 + 4 = 12 + 5 = 17$ ，進一步將原來的問題 $8 + 4$ 解釋成 $12 + 5 = 17$ ，將等號視為是進一步計算的結果。

（四）依照經驗認為，等號代表等式兩邊數字計算的答案結果是一樣的。

（五）認為等式兩邊的語法錯誤，左邊可以計算，但右邊應該呈現答案而已。

為何會產生這些反應？一些研究認為，這是因為學校教師與課本對等號採取運算的說明，是用來解決「運算—等號—答案」的問題，而不再說明等號可當成關係的符號，學生只要能運算數字獲得答案即可。這樣的結果，造成學生認為等號所關聯的意義就是運算，等號是處理運算的指示（Carpenter et al., 2003; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005）。

除文本與教學的因素影響學生採取運算意義外，有些學者則從學生等號概念的發展，解釋等號關係概念產生困難的原因（Gelman & Gallistel, 1978）。Gelman 與 Gallistel（1978）發現，幼兒判斷 2 個集合是否相等時，會依賴數數的結果是否一樣而進行比較，另一方面，他們也採取加在一起計數比較，這種能力間接形成了運算的觀念。進入小學後，學生進行比較和加法的能力更加地成熟，但仍須透過完成一系列連續的行動（如分別計數，然後再比較），才能說明「+」與「=」之間的意義（Kieran, 1981）。由此可知，學生對於理解等號關係概念

的困難是受到早期算術經驗所建構的知識影響。Carpenter 等人（2003）也發現，當學生建立等號概念後，許多學生會堅持已建立的等號概念，不會輕易改變。由此可了解，學生初始建立的等號概念對未來學習的影響重大，所以，在開始接觸等號時，就應該提供豐富的活動與命題，協助其建立正確的等號概念。McNeil 等人（2006）認為，合宜的等號作業應該包括：

- （一）可釐清等號概念的焦點；
- （二）讓學生檢驗不同等號狀態所提出的情境要求；
- （三）提供學生思考的視窗。

針對釐清等號概念的焦點而言，對錯及開放的數字命題已證明具有特殊的效用，可當成討論相等概念使用（Carpenter et al., 2003）。不同與多樣的情境可以鼓勵學生檢驗其所選擇的狀態，等式中兩邊並列數字的命題形式，可讓學生針對呈現的描述是否正確，表示同意與否，並測知等號概念是否有誤。另外，包含 0 的數字命題，也可鼓勵學生接受不同等號的概念，例如 $9 + 5 = 14 + 0$ 。為協助學生合宜地運用等號並發展正確的等號概念，Carpenter 等人（2003）以等號兩邊物件「相等」的觀念做為設計命題的基礎，探究學生等號概念發展的狀況。學生需運用包含等號雙邊運算、單邊運算後加、減互逆算法、關係思考等策略解題，這些方法皆與等號意義的解釋有關，學生若將等號視為是單邊運算所得的結果，那麼就容易將等號右邊的空格，填入左邊運算結果的數字，而忽略其他項目之間的關係；若學生持的是兩邊物件「相等」的解釋，則將採取等號兩邊運算或關係思考進行探索。Denmark、Baxco 與 Voran（1976）設計教學實驗，透過平衡活動配合等式寫作，以「相等」的關係教導一年級學生，發現學生可在不同的命題結構中合宜地運用等號，例如 $3 = 3$ 、 $3 + 2 = 4 + 1$ 、 $5 = 4 + 1$ 。因此可知，理解等號概念並不只依賴運算，也可以學習運用相等的關係概念解題。然而，小學一年級階段的數學教材有關「等號雙邊運算」的命題甚少，牽涉的原因雖與學生認知發展、解題策略運用、課程教材安排與教法等因素有關，但要提升學生等號概念，就應針對這些議題加以實證探究，以發現等號概念發展最佳學習的機制。

二、基模導向解題教學之探討

基模依照哲學與心理學的論點有不同的定義，且隨著歷史發展，內涵會有所擴增。Kant（1787/1968）相信，世上存在著純概念或理解的範疇，這些都先驗於心智，人類學習困難之處在於如何應用這些抽離的範疇去知覺真實世界的事物，而基模的功能便在於連結此概念和知覺，提供被知覺現象的表徵，並於限制的內在範疇下加以說明。Piaget（1936/1952）則聚焦在基模如何發展與改變，將之描述成物理行動和認知功能的集合體，同時對與基模關聯的知覺經驗進行反應。Piaget（1936/1952）認為，基模是三個觀點認同的結果：複製、辨認、類化（generalization），在多元複製的過程中，所需的基模會有所不同，當事件或行為與基模有關聯時，基模可類化且應用到更廣泛的情境。Piaget（1936/1952）認為，個體會與環境進行交互作用，當認同新經驗時，會建構知覺到既有的基模上，並調整基模以適應經驗的限制，所以，基模是由經驗所建構，並且反過來建構經驗。Piaget 的觀點提供基模的架構與理解，但對於如何進行教學或提升基模，則未提出實例說明。近來，一些學者透過實證探索基模的本質，發展出聰慧的電腦模式而刺激基模實例的產出（Minsky, 1975; Schank, 1975）。Marshall（1995）認為，相似經驗集合在某一架構下稱為基模，亦即同化與聚集相似的經驗，可以讓學生很快或容易記住。基模最大的特徵是，當某一片段資訊與提取的記憶有關聯時，與此相同基模連結的其他資訊就會被活化，而進行心智的處理；其次是，許多不同種類的知識可透過基模而連結，包含概念性的資訊、可辨識的特徵、計畫的機制及歷程性的技巧等。等號概念的結構，包含：（一）概念性知識：即「相等」的概念；（二）程序性知識：包含數數、比較、組合、分解等運算能力和技巧。這兩種知識相互輔助、彼此支撐發展，若能透過促進概念或基模的教學方式結合這兩種知識，可協助學生理解等號概念。

為讓教學可創造與擴展學生的重要概念，Marshall（1995）提出「基模導向解題教學」理論，強調教學歷程需先辨認學科場域的概念和環境顯示的特徵，然後建構能辨認這些學科觀念的課程，發展如何執行功能的心智模式；接著，形成運用所創造觀念的方法；最後，發展成學科所需之技巧和步驟。「基模導向解題教學理論」與其他理論不同之處在於，大多數理論只強調最後執行技巧和步驟的

產出，而忽略前階段行動的重要性。Marshall 的理論特別強調教學時辨認與思慮知識的應用，目標在於培養學生成為積極的解題者，而非被動或被灌輸大量知識的儲存者，因此，知識建構是以基礎概念為核心，強調為何以及如何與不同元素連結。

Marshall（1995）將基模導向解題教學定義為以下操作歷程：

- （一）第一階段：辨識問題情境中運用的基模關聯知識；
- （二）第二階段：將問題或問題類型裡重要的元素予以配對及呈現其關係；
- （三）第三階段：計畫和選擇所合適的數學等式進行運算；
- （四）最後階段：執行此計畫。

圖 1 顯示四項知識進行的歷程，包含概念性知識類型與不同程序性知識的功能，這些知識類型可被分開或組合加以研究。

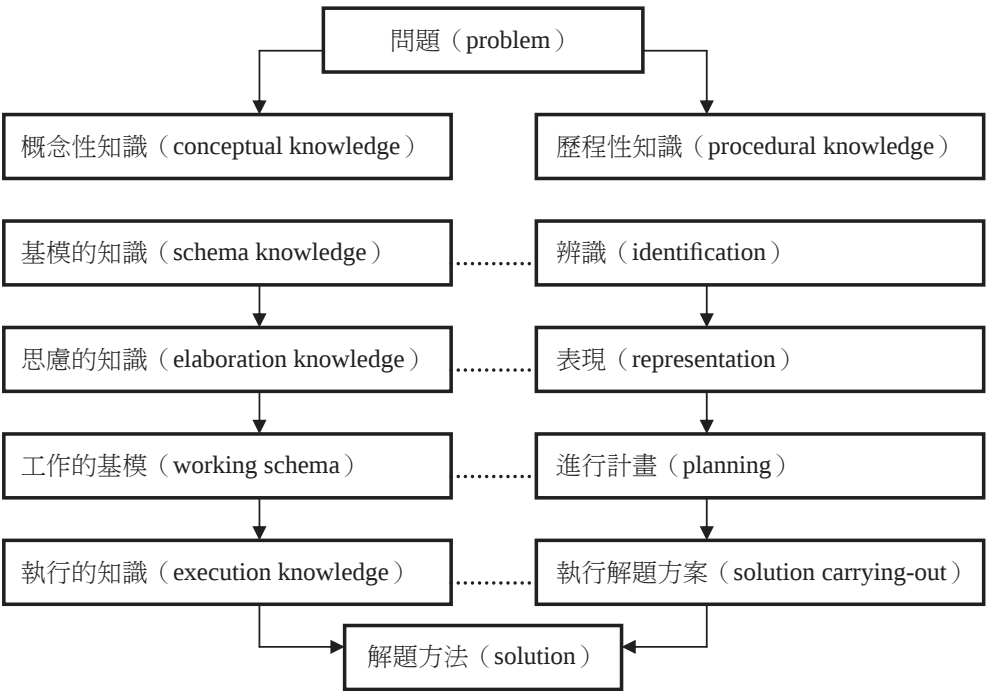


圖 1 基模導向之解題教學模式

資料來源：出自 Marshall (1995).

（一）辨識的知識

其功能在於辨識樣式，做為辨識情境、事件及經驗的初始知識。樣式辨識並非個體隨意臆測，而是採取掃描或逐項查核特徵才能正確，因此，只能在同時處理許多特徵的認知結果下才會發生。雖說不同的特徵呈現不同的樣式輪廓，但必須在相同基本的情境下，才能同時注意而辨識出特殊的特質。每種數學概念皆有其所屬核心的辨識知識，但不同的概念也有可能分享共通的元素。例如以數字 10 的合成為例，學生需同時注意兩數字合成後等於 10 的事實，其中，若有一數字改變，則另一數字也需同時改變，若能發現此法則，經引導歸納後，即可發現一組數字逐漸增加時，另一組數字則會逐漸遞減的樣式變化，並同時了解分解與合成歷程中的數字關係。

（二）思慮的知識

係指思考問題情境裡主要的特徵或觀察概念周遭已經發展的事件，亦即個體將發現特殊範例的經驗，與可描述此經驗的一般摘要結合在一起。思慮的知識促進個體創造現在問題的心智基模，透過現在經驗的闡述與表現，可將之前一般情境辨認的經驗，轉移到知識的思慮模版上。例如學生進行數字 10 的分解活動時，可運用先前所學數字合成的經驗產出兩組相關的數字，並利用合成的經驗，驗證是否等於 10，然後再運用此兩種經驗的結合，探究解題的結果是否正確。

上述辨識與思慮的知識建構可讓學生對情境形成企圖假設的一個結構，然後進行檢測，此假設的形式是對情境辨識產生的結果，通常是透過辨識知識的應用而被帶入對假設的評估，進而決定思慮知識是否具有充分證據的存在，以確定可接受對情境的辨識，並採取伴隨的知識。

（三）計畫進行工作的知識

指的是何種知識可以用來做為計畫、創造期待及設定主要目標和次目標之用。知識的使用並非直線進行，某種知識用於某特殊解題情境，並非意味其也可自動地被引導到複雜的計畫。此知識可從使用計畫知識的經驗中獲得，並假設在運用時可急速地更新。計畫知識的檢驗，可判斷學生是否具備基礎知識，因為在計畫中，學生需將既有的知識與能力加以整合，配合情境運用。以 $6 + 4 = 7 + 3$ 是否正確為例，學生可計畫運用數字合成和分解的基模，透過等號兩邊數字增減變化的辨識與經驗獲得答案，亦可經由運算結果驗證兩邊是否相同，而獲得等

號的意義。

（四）執行的知識

係指允許執行計畫步驟的知識與技術是可引導行動的，例如形成的技巧或遵循某些算則。執行的知識可在許多概念之間彼此分享，例如所有算術問題的概念在運用執行的知識時，必須能處理加、減、乘、除等算則的執行，運算的選擇和順序則需透過計畫的知識才能決定。

對等號概念或運算能力的習得和轉化而言，問題結構的辨識是最基本的，所以，必須提供不同情境的經驗。Greeno（1991）認為，學生能明瞭某項重要的概念，在於如何運用基模進行建構與推理，如果等號問題情境屬於物理狀態，那麼就會創造視覺表徵，以促進空間思考的基模；若等號問題情境屬於數字或數量，為了推理，就會建構一種問題情境的基模。因此，針對等號概念的轉化，需將重點集中在「具體表徵與抽象數字」和「認識新奇與熟悉的問題」之間明確連結的教學，才能協助學生從不同的情境中，透過思慮、計畫與執行等歷程整合等號概念的學習。

參、研究方法與步驟

本研究首先針對國小現階段有關等號概念教材與所具備之知識加以分析，做為設計相關等號情境作業與安排教學順序的基礎，並於每階段教學實驗後，實施等號概念測驗，以蒐集師生課室教學互動與成就測驗表現資料，然後加以統計分析與詮釋說明，逐步達成研究目的。

一、研究樣本

樣本為南部地區某公立小學一年級學生 26 人，該校處於文教區，該班學生家長有 5 位任職於公家機關，5 位擔任學校教師，其餘則為經商或為上班族，家庭社經地位處於中上程度。家長重視孩子學習，入學前，學生均接受過幼稚園教育，普遍上，擁有國字書寫、算術計數基礎能力。放學後，有 15 位學童參加安親班課業輔導，二分之一學生參加舞蹈、音樂、美術等才藝課程。首先，進行「等號概念測驗前測」，依測驗結果由班級導師推薦 12 名學生參與研究，研究者以

全體平均成績 15.8 分（全部正確可得 21 分，以下均同）為分組基準，將成績高於平均分數者列為高分組（6 名），低於平均分數者列為低分組（6 名），透過抽籤方式，分別將高、低兩組學生 2 人配對一組，分派參與等號概念基模導向解題教學活動。在研究進行前，教師已經教導 10 以內數字的合成與分解，以及加、減法記錄的方式，例如 $5 + 3$ 、 $6 - 1$ 等。

二、教學內容探討與設計

研究者歸納、分析現行國小數學教科書內容，國小一年級學生所需之等號概念包含數字分解、合成能力、以 10 為主的位值概念，以及運算後獲得的數字保留概念。參考 Denmark 等人（1976）之教學實驗設計，安排等號「反身性」、「單邊運算」、「雙邊運算」等概念（如 $3 = 3$ 、 $5 = 4 + 1$ 、 $3 + 2 = 4 + 1$ ）之教學情境，配合基模導向解題教學的辨識、思慮、計畫與執行等歷程產出的反應，與教學活動後之成就測驗結果，做為研究與分析學生等號概念表現的架構，其關係如圖 2 所示。

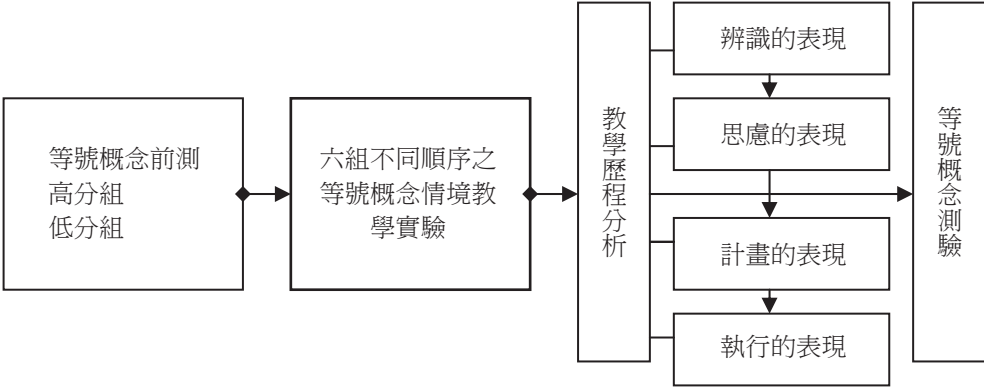


圖 2 學生等號概念學習關係圖

為具體觀察學生運作，了解學生是否明白教學活動說明與相關數學概念，本研究於每種教學情境中，依序安排：（一）天平平衡、（二）花片拼拼、湊湊、（三）等號算式解題等活動，讓學生透過實物操作及數字關係的辨識、思慮、計畫與執行等基模知識，展現不同情境所涵括之等號概念。

（一）天平平衡活動

首先呈現天平讓學生操弄，詢問學生當兩邊秤盤一樣高（平衡）時，代表何種意義？學生明白兩邊放的積木數量呈現「相等」後（反身性， $A = A$ 兩邊為同樣相同的物件），研究者再呈現天平不平衡的現象，詢問學生如何讓它「平衡」。學生嘗試著操弄兩邊秤盤的積木數量，以解決問題，了解天平的平衡可表示秤盤兩邊數量「相等」的概念；再者，告知學生可將天平代表「 $=$ 」，也可將平衡時之數量操弄過程及結果用算式呈現，例如天平兩邊皆無積木時會呈現平衡，此時可寫成 $0 = 0$ 。又如，左邊秤盤有 9 個積木，右邊秤盤放 6 個積木，怎麼做兩邊才會平衡？學生將右邊秤盤再放上 3 個積木，總共等於 9 個，也可寫成 $9 = 6 + 3$ 。再分別呈現「秤盤兩邊一樣」、「秤盤單邊操弄」、「秤盤雙邊操弄」的問題，提供學生思考操作。在此過程中，教師應指引學生書寫符應「反身性」、「單邊運算」與「雙邊運算」之算式記錄。俟學生寫出正確算式後，要求學生配合天平平衡的情境，說明等式的意義，例如 $9 = 6 + 3$ ，剛才這邊有 9 個積木，另一邊 6 個， $6 + 3$ 是 9， $9 = 9$ ，也可以說 $9 = 6 + 3$ 。

（二）花片拼拼、湊湊活動

將天平具體平衡的情境改成「想像」平衡的情境，利用紅色與綠色色紙當成天平左右 2 個秤盤，再呈現「兩邊一樣」、「單邊操弄」、「雙邊操弄」的問題，提供學生思考。在此過程中，教師應指引學生書寫符應「反身性」、「單邊運算」與「雙邊運算」之算式記錄。俟學生寫出正確算式後，要求學生配合天平平衡的情境，說明等式的意義；接著呈現算式，要求利用花片表徵與說明算式的情境。例如 $7 = 7$ ，學生要在紅紙上放上 7 個花片，綠紙上也放 7 個花片，表示兩邊相等；或 $7 + 3 = 5 + (5)$ ，學生操作花片並說明紅紙上有 7 個花片，綠紙上有 5 個花片，紅紙又放上 3 個花片，變成 10 個花片，綠紙要 10 個花片才會「相等」，所以綠紙上還要再放上 5 個花片。

（三）等號算式解題活動

呈現「反身性」、「單邊運算」與「雙邊運算」之算式，要求學生解出算式中之未知數，學生可以直接運算、畫圓圈、手指數數解題。在解題過程中，學生可將運算結果記錄於旁，或分段說明，以協助解題。例如 $8 - () = 2 + 3$ ，學生可先記錄 $2 + 3 = 5$ ，然後說出等號右邊應該變成 5 才會相等， $()$ 是 3。

等號概念教學情境的內容，如表 1 所示。

表 1 等號概念教學情境之類型及相關內容

等號概念情境之類型	等號概念教學情境之相關內容
情境一：等號反身性	1. 等號兩邊相同之單一數量 1.1 $0 = 0$ 1.2 $A = A$ (A 為 10 以內之整數) 1.3 $A + 0 = A + 0$ 1.4 $A - 0 = A - 0$ 1.5 $A + B = A + B$
情境二：等號雙邊運算	1. 等號雙邊數字同時加法運算 1.1 數字一樣，位置交換，例如 $A + B = B + A$ 1.2 數字皆不同，例如 $A + B = C + D$ 2. 等號雙邊數字同時減法運算，例如 $A - B = C - D$ 3. 等號一邊數字加法運算，另一邊數字減法運算，例如 $A + B = C - D$ 或 $C - D = A + B$
情境三：等號單邊運算	1. 等號單邊數字加法運算，例如 $A = B + C$ 或 $B + C = A$ 2. 等號單邊數字減法運算，例如 $A = B - C$ 或 $B - C = A$

教學活動之內容則以表 2「等號雙邊運算」為例加以說明。

表 2 「等號雙邊運算」教學活動內涵

活動項目名稱	活動內容	教學時間
天平平衡	首先介紹天平代表等號，因為兩邊不管怎麼變化，一定要相等時，才會平衡（辨識）。俟學生了解操作過程後，進行天平兩邊同時加、減的練習（思慮），例如 (1) $4 + 3 = 5 + ()$ 將天平左邊放 4 個積木，右邊放 5 個積木，問學生兩邊是否平衡？（辨識）學生回答沒有，這時候，哪邊比較多呢？學生回答右邊。然後，老師在左邊再放 3 個積木，並表示 $4 + 3 = 7$ （思慮），這時右邊已經有 5 個，怎麼樣才會和左邊平衡？學生回答要加上 2 個（計畫），因此，右邊是 $5 + 2 = 7$ ，而左邊是 $4 + 3 = 7$ ，並讓學生寫下 $4 + 3 = 5 + 2$ 算式。（執行）	1.5 節 （60 分鐘）

表 2 「等號雙邊運算」教學活動內涵（續）

活動項目名稱	活動內容	教學時間
花片拼拼、湊湊	發給學生每人兩張不同顏色的色紙，代表天平兩端的秤盤，並給數個花片（代表原先天平活動的積木），讓學生操弄（辨識），以求得兩邊色紙上的花片數量相等，以算式寫下過程與結果，並將兩邊相等的現象加以解釋（思慮），例如 $(1) 5 + 3 = 4 + ()$ 要求學生在左邊紅色紙上放 5 個花片，右邊綠色紙上放 4 個花片，問學生兩邊的花片是否一樣？（辨識）學生回答沒有，這時候哪邊的（哪種顏色的紙上）花片比較多呢？學生回答右邊。然後要求學生在左邊紅色紙上再放 3 個花片，並表示 $5 + 3 = 8$ （思慮），這時，右邊綠色紙上已經有 4 個花片，怎麼樣才會和左邊紅色紙上的花片一樣多？（計畫）學生回答要在綠色紙上加上 4 個花片，因此，右邊是 $4 + 4 = 8$ ，而左邊是 $5 + 3 = 8$ ，所以 $5 + 3 = 4 + 4$ （執行）。	1.5 節 （60 分鐘）
等號算式解題	要求學生依據題意畫出圓圈，然後找出括弧的答案（計畫與執行），並對算式進行解釋，例如 $(1) 3 + 3 = 5 + ()$ $(2) 6 - () = 9 - 7$ 可直接用算術求出答案，畫圓圈或用手指計數，說說看這個式子在說什麼？	1 節 （40 分鐘）

上述活動內容配合基模導向解題相關知識的發展，先以「等號」相關之辨識知識加以引發（如天平平衡狀態代表相等的意義），然後伴隨思慮、計畫與執行等相關知識的教導，讓學生遵循簡單至困難的順序，激發動機投入學習。為理解學生是否明白相關概念，活動歷程借助於一些引導與誘發。在辨識方面，以「從天平兩端放置的積木，你看到什麼變化？」、「左右兩邊紙上的花片有何不同？」等問題，鼓勵學生對問題情境加以觀察，從不平衡或變化中，進行相等概念的思考。在思慮的部分，則從情境的變化中，要求學生記錄，並思考如何將相等的關係呈現。在計畫的部分，則詢問學生「你會採用何種方式來協助計算？」、「解決此問題，要怎麼做比較容易？」。在執行的部分，則要求學生以關係概念解題，詢問學生「想辦法正確快速算出答案！」或「想想看，還有更好的方法！」。

透過天平平衡等三階段活動的表現與反應加以分析、探討，可推論學生在每種等號概念情境學習的狀況。參與教學實驗之學生需接受 2 節「等號反身性」、3 節「等號單邊運算」、4 節「等號雙邊運算」的情境教學活動，總計每位學生所需教學實驗時數為 9 節課（360 分鐘）。

三、教學實驗設計

為了解學生在不同等號情境的表現及產出的效用，將等號「反身性」、「單邊運算」與「雙邊運算」等三項情境活動加以組合形成六類教學順序模式（反身性→單邊運算→雙邊運算；反身性→雙邊運算→單邊運算；雙邊運算→單邊運算→反身性；雙邊運算→反身性→單邊運算；單邊運算→雙邊運算→反身性；單邊運算→反身性→雙邊運算）。每種教學情境模式，分別有 2 組的學生（4 名）參與活動的安排，每階段教學活動結束後，學生立即接受「等號概念測驗」。教學實驗活動皆由研究者擔任，因此，可掌握教學活動時間安排、教學進度、教材內容與教師期待等因素產生的影響。有關教學實驗歷程互動及解題表現，皆予以錄影（音），以做為分析學生等號概念習得與轉化資料之用。

四、研究工具

研究以自編之「等號概念測驗」（如附錄一）做為蒐集學生等號概念教學後成就表現之工具，該測驗內容包含：

（一）數字算式對錯判斷問題

目的在於檢測學生是否理解各類算式所呈現之不同等號概念，總計 8 題，包含等號反身性、單邊運算、雙邊運算等數字加、減命題，要求學生對呈現之數字算式敘述是否正確進行判斷，每答對一題可得 1 分，全對者可得 8 分。

（二）數字填充問題

目的在於檢測學生是否理解等號代表之意義，運用數字合成、分解進行運算，總計 8 題，包含數字加、減等號概念之問題，要求學生寫出算式中空格的數字，空格位置分別位於等號之兩邊，答對一題可得 1 分，全對者可得 8 分。

（三）相等概念配合題

目的在於檢測學生是否具備等號兩邊相等的概念，總計 5 題，分別在試卷左

右兩邊呈現不同數字算式命題，要求學生將具相等關係的算式予以連結，答對一題可得 1 分，全對者可得 5 分。

測驗試題採複本方式設計，將「等號概念測驗」之內容順序與數字更改修正，成為「等號概念測驗 I、II、III」，並分別於各教學活動結束後施測（如表 3），每項測驗時間為 20 分鐘，測驗時，學生可配合各式表徵，例如畫圖、手指數數解題。

表 3 本研究各階段使用之測驗

測驗階段	使用測驗名稱
教學實施之前測	等號概念測驗 I
第一階段教學活動測驗	等號概念測驗 II
第二階段教學活動後測驗	等號概念測驗 III
第三階段教學活動後測驗	等號概念測驗 I
教學實施後延宕測驗	等號概念測驗 II

五、資料分析

有關學生測驗表現，可從兩部分加以分析比較，一是全體受試學生在各階段教學實驗後之測驗表現，採取成對樣本 *t* 檢定加以考驗，以明瞭教學實驗產出的成效；二是高、低分組學生在各階段等號概念的表現，採取獨立樣本 *t* 檢定考驗高、低分組學生表現之差異。由於研究受試者人數僅 12 人，且發現高、低分組之資料變異數差異達到顯著（ $F = 20.0, p < .01$ ），因此，各教學情境活動結束後產出之測驗成績，則採用 Cochran 與 Cox 的方法進行 *t* 考驗（林清山，1992）。本研究除探討教學實驗成效外，也將重點置於不同等號情境下，學生等號概念轉化的情形，強調各階段教學表現行為描述。教學實驗歷程師生互動之內容，則根據學生在情境進行的活動及基模導向教學知識類型所呈現的說明、解題表現與思考方式進行編碼與文字稿轉譯，採質性分析加以詮釋，編碼方式如表 4 所示。

學生學習等號概念時，採用的基模知識是完整的連續體。為求研究與分析方便，研究者與實驗班級的導師審視學生表現的性質與資料類型之關聯性，強迫予

表 4 本研究資料編碼一覽表

符碼類型	說明
S4	代表編號 4 學生的說明
C1、C2、C3	分別表示「單邊運算」、「雙邊運算」與「反身性」三個不同之等號教學情境
A1、A2、A3	分別表示「天平平衡」、「拼拼湊湊」與「等號解題」三個階段之活動
M1、M2、M3、M4	分別表示「辨識」、「思慮」、「計畫」與「執行」四種行為

以歸類，但相同資料可跨屬不同知識類型，例如思慮可與執行的知識表現連結。

六、實施步驟

本研究先行分析教科書文本，再進行測驗工具的編製，於 2008 年 10 月初至 2009 年 2 月底期間實施教學實驗。首先，對受試班級施予「等號概念測驗」之前測，依據結果選派學生做為教學實驗分組之樣本；其次，實施不同順序之等號概念情境教學實驗，每位學生皆需接受 3 週不同情境之教學安排，每種情境教學完成之後，各施予「等號概念測驗」，2009 年 3 月底則施以教學後延宕測驗，以了解學生接受教學實驗後，等號概念保留的狀況。教學實驗及測驗完成之後，研究者再針對資料進行分析整理，撰寫研究報告。

肆、結果與討論

研究結果以學生之「等號概念測驗」表現、有效教學情境之等號概念學習表現，以及基模導向解題教學之等號概念轉化等加以分析討論。

一、學生之等號概念測驗表現分析

學生於各階段教學實驗後等號概念測驗之表現，如表 5、6、7 所示。

從表 6 結果得知，學生在第一階段等號測驗的表現與前測比較，並無顯著差異，其餘各階段之測驗成績與前測相較，則有顯著差異；第二階段教學實驗後，學生在測驗成績上優於前測表現 ($t = 2.9, p < .01$)；第三階段教學實驗後，

表 5 學生之「等號概念測驗」表現描述性統計分析

教學情境 順序	學生代號	前測（兩人 總和）		第 1 次測驗 （總和）		第 2 次測驗 （總和）		後測 （總和）		延宕測驗	
1 C1 → C2	S1（女）	15	（31）	11	（27）	13	（29）	17	（35）	16	（34）
→ C3	S2（男）	16		16		16		18		18	
2 C2 → C1	S3（男）	14	（33）	10	（31）	13	（34）	12	（33）	12	（33）
→ C3	S4（男）	19		21		21		21		21	
3 C3 → C1	S5（男）	18	（33）	16	（30）	21	（39）	19	（38）	19	（37）
→ C2	S6（男）	15		14		18		19		18	
4 C1 → C3	S7（男）	16	（30）	18	（37）	20	（39）	21	（42）	21	（41）
→ C2	S8（女）	14		19		19		21		20	
5 C2 → C3	S9（女）	14	（32）	10	（31）	14	（34）	11	（32）	14	（34）
→ C1	S10（女）	18		21		20		21		20	
6 C3 → C2	S11（女）	15	（31）	14	（32）	19	（37）	21	（41）	18	（37）
→ C1	S12（女）	16		18		18		20		19	
平均分數		15.8	31.7	15.7	31.3	17.7	35.3	18.4	36.7	18	36

註：C1：單邊運算情境，C2：雙邊運算情境，C3：反身性情境；低分組：S1、S3、S6、S8、S9、S11，高分組：S2、S4、S5、S7、S10、S12。

表 6 學生各階段測驗成對樣本 t 檢定統計分析

成對比較	個數	平均數	標準差	t	顯著性
前測—第 1 次測驗	12	.2	3.0	.2	.85
前測—第 2 次測驗	12	-1.8	2.2	-2.9	.01
前測—後測	12	-2.6	3.0	-3.0	.01
前測—延宕測驗	12	-2.2	2.1	-3.5	.01

* $p < .01$

學生在後測的表現亦優於前測表現（ $t = 3.0$ ， $p < .01$ ），顯示基模導向教學對學生等號概念之學習產生效果。而延宕測驗之表現與教學前測比較，亦有差異存在（ $t = 3.5$ ， $p < .01$ ），且達到顯著水準，顯示教學實驗對學生等號概念的學習與保留具有一定正向的效果。

表 7 高、低分組學生各測驗獨立樣本 t 檢定統計分析

測驗名稱	比較組別	個數	平均數	標準差	t	顯著性
前測	高分組	6	17.2	1.3	4.5	.01
	低分組	6	14.5	.55		
第 1 次測驗	高分組	6	18.3	2.3	3.2	.01
	低分組	6	13.0	3.5		
第 2 次測驗	高分組	6	19.3	2.0	2.3	.04
	低分組	6	16.0	3.0		
後測	高分組	6	20.0	1.3	1.7	.12
	低分組	6	16.8	4.4		
延宕測驗	高分組	6	19.7	1.2	2.6	.03
	低分組	6	16.3	2.9		

* $p < .05$

從表 7 資料顯示，參與研究之低分組學生在等號概念學習的起始點上能力有所不同，且之間有顯著的變異數，經教學實驗後，除後測表現上無顯著差異外（ $t = 1.7, p > .05$ ），其餘各階段之測驗表現皆有顯著差異。第一階段教學實驗後，高分組學生在測驗成績上優於低分組學生的表現（ $t = 3.2, p < .01$ ）；第二階段教學實驗後，高分組學生在第 2 次測驗的表現亦優於低分組的表現（ $t = 2.3, p < .05$ ），顯示基模導向教學對高分組學生等號概念學習產生的效果較低分組學生佳。而延宕測驗表現之比較亦有差異存在（ $t = 2.6, p < .05$ ），且達到顯著水準，顯示教學實驗對高分組學生等號概念之學習與保留，較低分組學生效果好。

從各階段教學表現加以分析發現，第一階段教學結束後，第 4 組與第 6 組學生之表現較平均 31.3 分佳，其餘組別的表現皆低於平均；第二階段教學結束後，第 3、4、6 組學生之表現較平均 35.3 分佳，其餘組別的表現皆低於平均；第三階段教學結束後，第 4、6 組學生之表現較平均 36.7 分高，其餘組別的成績皆低於平均分數；延宕測驗表現，第 3、4、6 組學生之表現較平均 36 分佳，其餘組別的表現皆低於平均。整體歷程表現顯然以第 3、4、6 組較佳，這三組之教學順序為「單邊運算→反身性→雙邊運算」、「反身性→單邊運算→雙邊運算」及「單

邊運算→雙邊運算→反身性」，其中，以「單邊運算」或「反身性」為始的設計產出的教學效果較佳。

另從個別學生表現的資料分析，第一階段教學處理後，低分組 S8 學生之表現較平均數值（15.7）佳，其餘學生之表現皆低於平均；而高分組學生除 S5 外，表現皆較平均數值佳，亦較前測的成績進步，且 S4 與 S10 獲得滿分；第二階段教學處理後，低分組有 S6、S8 與 S12 三位學生的表現較平均數（17.7）佳，高分組除 S2 外，其餘學生之表現皆較平均分數佳，而 S4 與 S5 測驗成績達到滿分；第三階段教學處理後，低分組學生 S6、S8 與 S11 的表現較平均數（18.4）佳，且 S8 與 S11 後測的成績達到滿分，高分組的學生除 S2 表現略低於平均分數外，其餘學生之表現均佳，S4、S7、S10 後測表現皆為滿分，在此階段，高、低分組學生皆有良好的教學效果產出；在延宕測驗方面，低分組 S6、S8、S11 與高分組所有學生之表現，皆較平均分數佳，此結果顯示，基模解題導向教學實驗對學生產生良好的教學效果。

從教學順序設計分析，高分組學生在不同教學情境的表現皆佳，顯示可接受本研究設計之教學實驗挑戰；而低分組學生在「雙邊運算」為始的教學設計表現較差，顯示低分組學生對「雙邊運算」有其困難所在；而「反身性」為始的教學設計，部分低分組的學生雖在第一階段教學活動結束後表現較差，但經後續教學實施後，其往後階段之測驗表現均呈現進步的趨勢，顯示「等號反身性」為始的教學設計，也可促進學生等號概念的學習。

從上述結果發現，學生以「單邊運算」與「反身性」等號概念為始的教學實驗，成效較其他教學設計佳。此結果亦與一些學者的研究發現一致（Carpenter et al., 2003; McNeil & Alibali, 2005），顯示學生能依賴運算能力理解等號關係的意義，亦可透過情境中物件「相等」的比對，獲得等號概念。以運算的經驗做為基礎詮釋等號，可透過數字運算結果比較等號兩邊是否相等，進而了解等號代表關係的意義。因此，透過「運算」的引導，挹注學習歷程之辨識、思慮、計畫與執行相關知識，讓學生比較判斷等號兩邊結果，可建立相等關係之概念。另外，透過等號兩邊「相同」事物「反身性」的呈現，辨識、理解等號代表兩邊物件相等意義後，再配合單邊運算情境執行結果，亦能擴增其對等號的概念。

二、有效之等號概念教學順序表現分析

上述資料呈現學生接受不同順序之教學實驗後，各階段測驗表現之分析，綜合高、低分組學生之表現可發現，在不同教學順序安排下，以 $C1 \rightarrow C3 \rightarrow C2$ 、 $C3 \rightarrow C1 \rightarrow C2$ 與 $C3 \rightarrow C2 \rightarrow C1$ 三種學習路徑的設計效果較佳，教學實驗表現分析說明如下：

（一） $C1 \rightarrow C3 \rightarrow C2$ 教學順序表現分析

S7（高分組）與 S8（低分組）在等號單邊運算、反身性及等號雙邊運算的模式下，透過各階段活動之練習與指導，在後測與概念保留之延宕測驗有良好的表現。有關此教學順序模式對學習產生的效益可分為以下幾點加以闡釋：

1. 提供辨識運算結果可呈現在等號兩邊的機會，熟練等號單邊數字之分解與合成能力

在單邊運算的情境裡，學生透過天平「平衡」的觀察，將等號概念與天平平衡加以連結，理解等號可表示「兩邊相等」的概念。當進行天平平衡與花片拼拼湊湊活動時，教師提供與引導等式記錄的方式，讓學生了解到「運算」的結果可呈現於等號的左邊或右邊。

師：天平右端放上 2 個積木，然後再放上 7 個積木，天平左邊需要放上幾個積木，兩邊才會平衡？並將結果寫下來。【C1A1M1M4】

S8：9 個，可以寫 $9 = 2 + 7$ 。

師：你們認為 $9 = 2 + 7$ 對嗎？

S8：對！

師：你為何認為這樣寫是對的？

S7：這邊是 $2 + 7$ （右邊），這邊要放 9 個（左邊）才會平平，這邊寫 9，這邊寫 $2 + 7$ ，加上等號。

師：如果換成天平左端放上 2 個積木，然後再放上 7 個積木，天平右邊需要放上幾個積木，兩邊才會平衡？

S7：9 個。

師：結果要怎麼寫？

S7： $2 + 7 = 9$ 。

師：你們可否說說看 $9 = 2 + 7$ 和 $2 + 7 = 9$ 有什麼特別的地方？

S8：嗯 這邊先放 那邊先放。我知道了， $9 = 2 + 7$ 是左邊的天平，要放 9 個， $2 + 7 = 9$ 是右邊的天平，要放 9 個。

師：為什麼要放 9 個？

S7：這樣才會平平的。

由上述對話得知，學生能藉由天平平衡連結等式記錄，理解並呈現問題情境的運算結果，可置於等號的左邊或右邊。由於透過操作與等式記錄，學生對單邊數字分解與合成的運算更加地流暢與正確，因此，可做為後階段兩邊數字運算時的基礎。

2. 協助了解等號表示兩邊物件一樣的意義

當進入等號反身性教學情境時，S7 與 S8 因為已經具有「等號代表兩邊物件相等」的概念，所以，不論此物件是經由運算得到的結果，或是本身的投射，即便是「0」的情境出現時，仍能正確地運用等號「反身性」的概念解題。

師：在天平左、右兩邊各放 5 個積木，左邊拿走 0 個積木，可以用 $5 - 0 = 5$ 表示，那麼右邊要拿走幾個積木才會平衡？【C3A2M2M4】

S8：0 個。

師：為什麼要拿走 0 個？

S8：這邊有 5 個，拿走 0 個，還是 5 個，而這邊要 5 個，才會平平的，所以拿走 0 個。

師：這邊 5 個拿走 0 個，可以寫成 $5 - 0$ ，那麼這邊要怎麼寫呢？

S7： $5 - 0$ 。

師：這邊是 $5 - 0$ ，另外這邊是 $5 - 0$ ，這個 $5 - 0$ 和這個 $5 - 0$ 一樣嗎？

S7：一樣。

師：你是怎麼認為一樣的？

S7：他們都 5 個。

師：還有沒有其他的想法？

S8：嗯

師：我把這邊寫成 $5 - 0$ ，這邊寫成 $5 - 0$ ，兩邊的結果寫成 $5 - 0 = 5 - 0$ ，這樣對嗎？

S8：對！

師：為什麼你認為對？

S8：因為減 0 還是 5，這邊是 5，兩邊都是 5。

師：在右邊的綠色紙放 7 個花片，左邊紅色紙要放多少花片，兩邊的花片才會一樣多？寫下結果。【C3A2M3M4】

S7：7 個花片。寫成 $7 = 7$ 。

由上述對話得知，S7 和 S8 遵從教師的引導與思考，明白等號是「兩邊物件相等」的意思，此物件可以是本身，也可以是具有相同運算結果特質的物件。

3. 明白及驗證等號兩邊可同時進行運算，強化等號兩邊數字運算的能力

S7 與 S8 經「等號單邊運算」與「等號反身性」之情境教學後，理解等號是具有「兩邊物件相等」的關係概念，因此，進入雙邊運算的教學情境時，能運用等號的概念，配合精熟的數字合成與分解的能力解題。

師：左邊紅色紙上放 5 個花片，右邊綠色紙上放 4 個花片，兩邊的花片是否一樣？【C2A2M1】

S7：左邊。

師：請你在左邊紅色紙上再放 3 個花片（呈現 $5 + 3 = 8$ ），右邊綠色紙上已經有 4 個花片，怎麼樣才會和左邊紅色紙上的花片一樣多？

【C2A2M3M4】

S8：加上 4 個花片。

師：為什麼要加上 4 個花片？

S8：右邊是 $4 + 4 = 8$ ，左邊是 $5 + 3 = 8$ ，這邊 8 個，這邊 8 個，兩邊都是 8 個。

師：那麼將這兩邊的結果寫成 $5 + 3 = 4 + 4$ ，你們認為是對的嗎？

【C2A2M2】

S7：我認為對。 $5 + 3$ 是這邊的， $4 + 4$ 是這邊的，都是 8 個。

師：左邊紅色紙上放 4 個花片，右邊綠色紙上放 8 個花片，然後紅色紙上

S5：2 個花片。

師：為什麼要拿走 2 個？

S5：因為兩邊都一樣，這邊拿走 2 個，這邊也要拿走 2 個才會一樣。

S6：這邊拿走 2 個是 4 個，這邊拿走 2 個也是 4 個。

師： $6 - 2 = 6 - 2$ 可以嗎？

S5：可以，這跟天平一樣，兩邊都是平平的。

師：我不懂你的意思，請你再說清楚！

S5：嗯 就是剛才做的，這邊和這邊的花片一樣時，這邊放 2 個，這邊也放 2 個，平平的。

由上述對話得知，學生經過花片操弄的活動後，可將等號反身性應用到實際問題上並做出說明。進入等號單邊運算與雙邊運算情境時，S5 與 S6 經由教師指示與引導，展現數字合成和分解能力，正確地解決數字問題。

師： $8 - () = 2 + 4$ 括弧應該填入什麼答案，你們會怎麼做？

【C2A3M3M4】

S5：這邊是 6，是 2。

師：為什麼是 2？

S5： $2 + 4 = 6$ ，8 減去 2 等於 6。

師：我還是不懂 $2 + 4$ 和 $8 - 2$ 有什麼關係？

S5： $2 + 4$ 是 6， $8 - 2$ 是 6，都是 6 啦！

由上述說明得知，S5 利用等號反身性（兩邊都是 6）與等號單邊運算結果，進行兩邊運算結果的比對，理解等號代表兩邊相等的關係符號。

（三）C3 → C2 → C1 教學順序表現分析

此教學順序與前述情境不同之處在於，第二階段提供等號雙邊運算情境，然後再進行單邊運算的教學。S12（高分組）與 S11（低分組）經教師指導學習到等號反身性的概念，但進入雙邊運算教學時，則因認知負荷與數字計算繁複的影響，需要更多的時間與努力才能調適。

師：在左邊紅色紙上放 5 個花片，右邊綠色紙上放 4 個花片，紅色紙上再

放 3 個花片（呈現 $5 + 3 = 8$ ），這時綠色紙上怎麼做才會和紅色紙上的花片一樣多？【C2A2M4】

S11：（拿出花片排列），5 和 3 是 8 個，這邊 4 個要再放 4 個。

師：你確定要放 4 個？為什麼？

S12：這邊是 8，這邊加上 4 也是 8。

師： $5 + 3 = 4 + 4$ 對嗎？【C2A2M2】

S11：（用手指頭計數）8 8，對。

由於 S11 與 S12 在兩邊運算的情境上，開始時受限於計算解題所需的認知資源，因此，需要精熟數字運算技巧後，才能在雙邊運算的情境順利解題。對大多數學生而言，雙邊運算的情境，除需具備等號兩邊物件相等之關係概念外，尚需充分流利的數字合成和分解的技巧，這對初始接觸此教學情境的學生而言，是一大挑戰，尤其對認知程度稍差的學生而言有其困難所在，這從接受 $C2 \rightarrow C1 \rightarrow C3$ 與 $C2 \rightarrow C3 \rightarrow C1$ 教學順序之低分組 S3 與 S9 的表現可見一斑。若無堅實之運算能力和正確的等號關係概念做為基礎，貿然地接觸雙邊運算教學活動，將會造成觀念混淆且易在學習上產生挫折。

綜合上述分析，對低分組學生而言，以「反身性」與「單邊運算」為始的教學設計效果最佳，而「雙邊運算」的教學設計仍存在著困難。對高分組學生而言，除「反身性」與「單邊運算」表現佳外，在「雙邊運算」為始的教學設計，仍可產出良好的效果（如 S4 與 S10），顯示雙邊運算的議題可在國小一年級實施，並可獲得成效，但以認知能力較好的學生為考量。建議低分組學生從「單邊運算」為始的教學順序安排，可用既有的運算能力為基礎，「強化」等號關係概念的建構，但此強化歷程需有合宜的教學輔導與充分的時間練習加以支撐；而高分組的學生透過「雙邊運算」為始的安排，因兩邊同時運算結果的比較，「驗證」等號具有兩邊物件相等的概念，教師可配合認知需求，安排合適的教學情境，協助學生等號概念的強化和驗證。

Carpenter 等人（2003）主張，學生利用運算方式判斷算式是否具有相等的關係，在數字分解與合成的過程中，若受限於計數技巧不純熟及認知資源不足，那麼等號學習將變得困難。換言之，要對兩邊運算命題產出正確解答，「等號單

邊」運算能力是基本的要求，國小一年級學生需利用分解、合成的策略，正確求得未知數的值，才能據此對運算結果進行比對，進而發現相等關係。基模導向教學實驗的問題設計，提供學生精進計畫與執行運算能力的機會，因此，至「雙邊運算」時，學生能正確地展現比較的結果，獲得較佳的等號概念表現。

三、基模導向解題教學之等號概念轉化分析

基模導向解題教學設計之辨識、思慮、計畫與執行知識之教導和誘發，對不同認知層次的學生產生不同的影響，有關等號概念轉化與連結，則以參與 $C2 \rightarrow C1 \rightarrow C3$ 教學順序之 S4（高分組）和參與 $C1 \rightarrow C3 \rightarrow C2$ 教學順序之 S8（低分組）兩位學生在課室之表現，做為分析說明的範例。

（一）透過天平兩端物件平衡的辨識，連結等號代表物件相等的概念

本研究設計之天平「平衡」現象的操作與觀察，可讓學生辨識等號概念之「運算」、「關係」與「反身性」等意義，並建立等號多元的觀點，學生可透過情境的變化，將天平平衡與問題的記錄連結，表達其對等號意義的理解。例如：

師：在天平的左端放上 3 個積木，再放上 6 個，天平右邊要怎樣兩邊才會平衡（把算式寫出）？【C2A1M1M4】

S8：9 個， $3 + 6 = 9$ 。

師：左邊已經有 4 個花片，再放 3 個花片（呈現 $4 + 3 = 7$ ），右邊已經有 5 個，怎麼樣才會一樣，算式要怎麼表示？【C2A2M1M4】

S8：加上 2 個， $5 + (2) = 7$ 。

師：為什麼要加上 2 個？

S8：這邊比較多，這邊比較少，加上 2 個才會一樣。

師：在天平左、右兩邊各放 8 個積木，左邊拿走 0 個積木，右邊要放進幾個積木才會平衡？（把算式寫出）？【C3A1M1M4】

S4：0 個， $8 + 0 = 8$ ，天平表示等號， $8 - 0 = 8 + 0$ 。

由於天平平衡的情境可做為等號兩邊物件相等關係的隱喻，提供和激發 S4 與 S8 辨識等號不同概念的機遇，透過平衡的操作與觀察，理解平衡時，兩端的

物件若具有相同的樣式（反身性），或是運算後的結果一樣，可表示相等的概念。在等號概念轉化與解題的歷程中，天平平衡的指導可協助將抽象等號算式的意義加以連結，做為解題的基礎。

（二）從問題情境變化，思慮如何記錄，以呈現等號意義

等號關係相等概念具有物件多元變化的特徵，可設計不同的問題情境，包含未知數的位置可在等號左、右兩邊，補充或拿取之加、減法的問題，以及簡化步驟之關係策略等，激發促動學生推理與思考，例如

師：（在紅色紙上放 4 個花片，綠色紙上放 8 個花片）現在紅色紙上再放 2 個花片（寫下算式），綠色紙怎麼樣才會和紅色紙上的花片一樣多？想想看你要怎麼做！【C2A2M2】

S8：綠色紙拿走 2 個， $8 - 2 = 6$ ， $4 + 2 = 6$ ， $4 + 2 = 8 - 2$ 。

師：為什麼要拿走 2 個？

S4：這邊是 6 個，要一樣，8 要減去 2。

師：（在紅色紙上放上 7 個花片，綠色紙上放 2 個花片）現在綠色紙上再放 3 個花片，這時，紅色紙怎麼樣才會和綠色紙上的花片一樣？【C2A2M2】

S4：很簡單，拿掉這邊（左邊）2 個就可以了， $7 - 2 = 5$ ， $2 + 3 = 5$ ， $7 - 2 = 2 + 3$ 。

師： $5 + () = 9 - 3$ ，括弧裡要填上什麼數字？【C2A3M2M4】

S4： $9 - 3$ 等於 6， $6 + 3 = 9$ ， $5 + 1 = 6$ 。

利用等號關係概念進行解題，學生並非僅靠運算就能解答，尚需洞察問題的變化，配合推理與安排合適的策略才能見效。本研究提供之活動，可激發學生思考問題情境中的物件特徵及變化，將先前建立之天平「平衡」與等號「相等」的心智基模，投射在問題情境上，對建立等號概念的歷程提供適切的說明。

（三）透過表徵計畫解題方式以理解等號意義

國小一年級的學生處於具體運思階段，大部分的學生仍需借助具體實物操作，例如畫圖、動作計數等表徵，將解題的步驟與結果予以連結，才能順利解題。因此，要建立學生堅實的等號概念，應同時呈現物件表徵與等號概念之間的連結

與轉換，讓學生計畫與選擇方法並驗證，才能促進學生對等號概念的理解。

師： $9 - 5 = (\quad)$ ，括弧裡要填上什麼數字，你要怎麼處理？

【C1A3M3M4】

S8：（在紙上畫出 9 個圈圈，刪掉了 4 個，然後一一計數）5 個。

師：你為什麼要畫圈圈？

S8：比較好算。

師： $7 - (\quad) = 2 + 3$ ，括弧裡不知道要填入什麼數字才正確，好！我們看一下天平，什麼時候天平才會平衡？【C2A1M3M4】

S8：一樣多的時候。

師：好！兩邊都一樣多的時候，現在右邊是 2 個加上 3 個積木，一共有幾個？

S8：5 個，

師：很好，右邊現在有 5 個喔！那麼要讓天平平衡，左邊應該要有幾個積木？

S8：5 個。

不同教學活動的安排，此可提供和激發學生學習運用具體表徵計畫和執行。對於認知能力較差的學生而言，具體圖像表徵的指導更屬重要，因為可協助其將抽象等號算式的意義加以連結，做為理解的基礎。S8 學生在等號單邊情境教學初始時，由於數字分解和合成能力並未精熟，因此，透過計畫「畫圓圈」的方式協助運算；而在接觸雙邊運算情境時，因無法將單邊運算之知識轉化至雙邊運算情境，教師鼓勵透過「天平實物操作」的具體表徵，配合計畫運算的步驟，以進行兩邊物件數量的比較。

（四）運用合宜的運算策略獲得等號相等的概念

等號概念教學之最終目的在於使學生能理解等號兩端物件具有「相等」的概念，研究提供之基模導向解題教學實驗，經提供天平與花片等具體操作、辨識後，學生在教師適當的導引下，運用數字分解、合成技巧，順利獲得等號相等的概念。

S8： $5 + (\quad) = 9 - 3$ ，括弧裡的答案是 4。【C2A3M2M4】

師：為什麼是 4 呢？

S8： $5 + 4 = 9$ 。

師：等於 9？你再仔細看一看，右邊的答案是 9？

S8： $9 - 3 =$ （想了一下，教師提示可以用手指協助）， $9 - 3 = 6$ 。

師：好！右邊是 6，那麼左邊的答案也要是 6 才對，想想看括弧裡應該填上什麼數字？

S8：嗯

師：沒關係，右邊現在算出來是 6，所以 $5 + () = 6$ （寫出算式提示學生解題）？

S8：1。

師： $5 + 3 = 4 + ()$ ，括弧裡要填上什麼數字？【C2A3M4】

S4：4。

師：很好，為什麼是 4？

S4：這邊的 5 比這邊的 4 多 1，是 4。

師：為什麼是 4，請你說清楚！

S4：3 加上 1 就對了。

對程度好的學生而言，不同教學情境之安排，可擴展促進等號概念與基模計畫及執行知識的運用。S4 將教學情境所學之等號概念轉化至問題情境，正確地運用等號概念與程序性知識進行解題，因此，各階段教學後皆有良好之表現。然而，對於能力不足的學生，則需在其既有的等號基模知識上，予以引導說明，協助建立更多元的等號概念，才有利於複雜命題的解題。以 S8 為例，因數字分解合成能力不精熟，面對「雙邊運算」的命題時，仍以「單邊運算」的知識為主，無法同時比對兩邊運算的結果，以致產生錯誤的答案。經教師指導協助其理解等號具有兩邊物件「相等」的概念，最後在等號概念測驗中亦有良好的表現。

伍、結論與建議

本研究旨在設計不同等號概念之教材，進行基模導向教學實驗研究，探索學

生等號概念表現，以發現合宜之等號概念學習路徑，做為日後代數推理課程編排與教學實施之參考。綜合上述研究發現，歸納結論如下：

一、經基模導向解題教學實驗後，學生能獲得等號反身性、單邊運算與雙邊運算相等關係的概念

本研究發現，不同等號概念之教學設計對不同認知能力之學生，會產生不同的教學效果，學生較易接受等號單邊運算與反身性情境問題，而等號雙邊情境問題對能力較差者則有挑戰性，此結果與 McNeil 等人（2006）的研究發現不同，主要的原因在於 McNeil 等人的研究對象為年齡較大的學生，其在數字運算的表現上較為精熟，因此，等號兩邊運算情境的安排，可協助學生透過運算驗證而發展等號概念；但本研究對象為國小一年級的學生，在數字運算的表現上，經驗與精熟度較為不足，因此，等號兩邊運算的情境對於發展等號概念而言，較為困難，這與其認知發展層次與解題策略有密切關係。是以，教師在進行課程安排時，需先理解學生認知發展層次，並針對個別差異，採用合宜之教學基模，呈現多元之等號概念與內涵，同時，「建構」、「鞏固」及「擴展」學生之等號概念。

二、學生等號概念的學習以路徑「單邊運算→反身性→雙邊運算」之教學效果最佳，其次為「反身性→單（雙）邊運算→雙（單）邊運算」之教學順序

從教學歷程與學生測驗表現分析發現，以「反身性」與「單邊運算」為始的等號概念教學順序設計，產生的效果較佳；除此之外，「等號雙邊運算」之情境安排也可促進能力較佳學生之等號概念學習表現，因此，教師可針對班級學生的認知能力，安排適合其發展的學習路徑，協助和促進學生等號概念的發展。

單邊運算能力是學生擴展其他等號概念的基礎，也是協助低能力者驗證雙邊運算結果的必要能力。學生對數字分解、合成能力的精熟，會影響等號概念的表現，尤其是解決開放式命題的等號算式，更需用到此方面的知識，所以，在教導等號概念的過程中，除強調概念性知識外，仍需配合程序性知識的訓練，透過基模導向解題教學辨識、思慮、計畫與執行的歷程，以促進學生獲得堅實的等號概念。

三、等號概念之間的轉化與連結，依學生認知能力差異而有不同表現

不同的教學情境會影響學生等號概念的理解與算式呈現的方式，因此，為擴展學生多元等號概念，提供不同等號概念情境的學習是有必要的。本研究透過等號概念基模導向解題教學的引導發現，大部分的學生可將單邊運算能力連結轉換為雙邊運算的技巧，進而理解等號兩邊的物件具有「相等」的概念。雖然相關能力的連結與轉化，會依學生認知能力之不同而有差異，但仍可提供國小一年級教師在教學上的重要啟示：安排實物操作之情境，呈現並配合情境意義之算式，耐心且詳盡地說明其間的關係，如此才能提供每一位學生代數學習的機會。

另需強調的是，本研究僅透過具體物操作、比較、運算方式呈現學生對設計情境的反應，雖發現學生可遵循不同路徑學習等號概念，但不保證學生可以確切理解等號相等關係的概念，例如 Carpenter 等人（2003）主張，學生若能在問題情境中，對等號加以討論與辯證，讓自己與他人確信所提之解釋，那麼，相等的關係概念就能確立。本研究樣本為國小一年級的學童，在等號基模程序性知識有關的分解、合成能力雖有基礎，但是否能藉由溝通、連結方式正確地呈現等號概念，尚須深入探討。

等號概念在數學實務上具有重要的關聯性，等號概念可鞏固學生數學的知識，促進計算的正確性，訓練代數推理更易進行。等號概念宛如 Säljö（2005）所言，係具有智慧性與物理性的加工物（artifacts），可經由論述與概念系統化，並透過文本、構圖及表徵獲得。等號概念是深化代數推理的基本工具，也是溝通觀念的符號。本研究以基模導向解題教學理論為基礎，融入不同順序等號概念教學情境，進行教學實驗，結果顯示，學生可獲取良好之學習成效，根據研究成果，可做為教室實務之參考。但教師運用時，仍需考量下列限制：

（一）數字分解與合成是學生學習等號概念必備之運算知識，其精熟度會影響等號的表現，教師面對國小一年級學生時應積極地透過數字 10 以內的運算，熟練分解與合成方面的技巧，以減少等號概念學習時的認知負荷。

（二）本研究針對等號三種基本概念，配合基模導向解題教學實驗，探討教學效果，在研究樣本數目與統計方法上尚有限制，不易進行推論應用，日後可建

立大規模量化及質性相依之研究，並以學生等號概念之運算能力為基礎，設計不同等號概念情境，配合多元表徵，例如文字、圖像等問題設計，考驗學生學習等號概念之最佳路徑與方法。

（三）教學歷程可安排數學符號配合情境之解說問題的意義，例如以？、□或（ ）代表某未知數，建立學生利用符號協助等號學習的習慣，並配合論證與說明，順暢地將算術轉化代數推理。

（四）本研究設計操作活動提供學生等號概念學習與發展之用，並探討其成效，其中牽涉之邏輯推理與心像表徵有關形式操作能力議題並未列入重點，有待日後加以整合，以提供更詳實之結果發現。

DOI: 10.3966/102887082011095703002

參考文獻

林清山（1992）。*心理與教育統計學*。臺北市：東華。

【Lin, C.-S. (1992). *Psychological and educational statistics*. Taipei, Taiwan: Dong Haw.】

教育部（2003）。*國民中小學九年一貫課程綱要：數學領域*。臺北市：作者。

【Ministry of Education (2003). *9-year-integrated mathematics curriculum standards for national schools from grade 1 to 9 in Taiwan*. Taipei, Taiwan: Author.】

陳嘉皇（2008）。國小學童等號概念解釋與解題策略初探。*臺灣數學教師電子期刊*，13，34-46。

【Chen, C.-H. (2008). The preliminary study both on the ideas interpretation and solution of equal sign of elementary students. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, 13, 34-46.】

陳嘉皇（2009）。提升學童等號關係概念理解教學設計與實施成效研究。*國立高雄師範大學學報*，26，21-41。

【Chen, C.-H. (2009). A Study on the effects of curriculum design and the instruction of equal sign of relationship conception understanding. *Kaohsiung Normal University: Ziranhexue and technology category*, 26, 21-41.】

陳慧姿（2009）。從基模理論談數學文字題閱讀理解及其對數學教學的啟示。*教育研究*，17，219-230。

【Chen, H.-T. (2009). An application of schema theory-based approach to the comprehension of

verbal mathematical questions. *Education*, 17, 219-230.】

陳麗華（1988）。基模理論與教科書內容的設計。現代教育，4，128-139。

【Chen, L.-H. (1988). Schema theory and design of textbooks. *Modern Education*, 4, 128-139.】

國立教育研究院籌備處（2002）。國小數學教材分析——整數的數量關係。臺北市：作者。

【National Education Research Preparatory Office (2002). *Elementary mathematics textbook analysis-integer the number of relations*. Taipei, Taiwan: Author.】

謝蘭如（2010）。國小三年級學童等號概念在數字算式和文字情境的差異。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（NSC98-2511-S142-001-M）。臺中市：國立臺中教育大學數學教育系。

【Xie, K.-R (2010). *Elementary school third-grade students equal sign concept in digital formula and text context of differences in project*. Executive Yuan National Science Council grants special research project results report. NSC 98-2511-S142-001-M.】

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Denmark, T., Baxco, E., & Voran, J. (1976). *Final report: A teaching experiment on equality*. Tallahassee, FL: Florida State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED144805)

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, CA: Harvard University Press.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.

Kant, I. (1968). *Critique of pure reason* (N. K. Smith, Trans.). New York: St. Martin's Press. (Original work published 1787)

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, 6, 285-306.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S. et al. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't

help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.

Minsky, M. (1975). A framework for representing knowledge. In P. Winston (Ed.), *The psychology of computer vision* (pp. 211-281). New York: McGraw-Hill.

Piaget, L. (1952). *The origins of intelligence in children* (C. Margaret, Trans.). New York: International University Press. (Original work published 1936)

Säljö, R. (2005). *Cultural tools and human knowing: A sociocultural perspective on learning and the study of learning*. Unpublished manuscript, Nordic Graduate School in Mathematics Education Summer School, Jyväskylä, Finland.

Schank, R. C. (1975). The structure of episodes in memory. In D. Bobrow & A. Collins (Eds.), *Representation and understanding* (pp. 237-272). New York: Academic Press.

附錄一

國小學童等號概念測驗 (I)

一年級 班 姓名：

測驗一：以下列出了幾個等式，你認為他的寫法是正確的，就在（ ）內畫○，認為是錯的，就在（ ）內打×。

- (1) () $4 + 5 = 9$

(2) () $7 = 3 + 4$

(3) () $6 = 6$

(4) () $10 - 5 = 2 + 3$

(5) () $8 + 2 = 10 + 4$

(6) () $7 + 0 = 7 - 0$

(7) () $4 - 2 = 2 + 6$

(8) () $5 + 3 = 8 - 2$

測驗二：請你想一想，寫出等式裡（ ）的答案。

- (1) $3 + 6 = ()$

(2) $() = 5 + 4$

(3) $8 = 8 + ()$

(4) $7 + () = 7$

(5) $9 - 4 = () + 2$

(6) $4 + 3 = 9 - ()$

(7) $() + 3 = 7 + 2$

(8) $6 - 3 = 7 - ()$

測驗三：下面左右兩邊各有五張卡片，哪兩張的答案是相同的，請你把它們連起來。

10	$4 + 3$
$6 + 3$	$8 - 2$
$8 - 0$	$5 + 5$
$3 + 4$	$7 + 2$
$9 - 3$	8

期刊徵稿：<http://www.edubook.com.tw/CallforPaper/BER/?f=oa>

高等教育出版：<http://www.edubook.com.tw/?f=oa>

高等教育知識庫：<http://www.ericdata.com/?f=oa>